A 2008 MATH. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES
DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS,
DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE,
DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2008

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
ENSTIM, TELECOM SudParis (ex TELECOM INT), TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définition 1. *On appelle polynôme trigonométrique toute fonction c de la variable réelle x de la forme*

$$c(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

où les c_n sont des nombres complexes, tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux. On appelle degré de c, noté $\deg c$*, le plus petit entier K tel que $c_j = 0$ pour tout $|j| > K$.*

On désigne par E l'ensemble des polynômes trigonométriques ; on tiendra pour acquis que E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel stable par la multiplication des fonctions.

Pour un nombre complexe z, $\Re(z)$ représente sa partie réelle et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

I Stabilité d'un polynôme trigonométrique

1. Montrer que l'on définit une norme sur E en posant

$$\|c\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$$

pour tout $c \in E$.

2. Soit $c \in E$, établir pour tout entier p de $\{-\deg c, \cdots, \deg c\}$, l'identité

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(x) e^{-ipx} \, \mathrm{d}x.$$

3. Montrer que pour tout $c \in E$, on a

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |c(x)| \leqslant \|c\| \leqslant (2 \deg c + 1) \sup_{x \in \mathbf{R}} |c(x)|.$$

Définition 2. *On dira que le polynôme trigonométrique c est stable lorsque la suite $\|c^k\|$ des normes de ses puissances successives est bornée quand k décrit* $\mathbf{N}$*.*

4. Montrer que s'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $|c(x_0)| > 1$ alors c n'est pas stable.

Le but de la suite de ce problème est de montrer que la condition $|c(x)| \leqslant 1$ pour tout réel x n'est pas suffisante pour que c soit stable.

II Un polynôme trigonométrique particulier

Dorénavant, α désigne une constante réelle telle que $0 < \alpha < 1$ et a désigne le polynôme trigonométrique

$$a(x) = \alpha^2 \cos x - i\alpha \sin x + 1 - \alpha^2.$$

Pour tout entier $k \geqslant 2$, on note $a_{k,n}$ les nombres complexes tels que la puissance k-ième de $a(x)$ s'écrive

$$a^k(x) = \sum_{n=-k}^{k} a_{k,n} e^{inx}.$$

5. Établir, pour tout réel x, l'identité

$$|a(x)|^2 = 1 - 4(\alpha^2 - \alpha^4) \sin^4 \frac{x}{2}\cdot$$

En déduire que a vérifie les propriétés $a(0) = 1$ et $|a(x)| < 1$ pour tout x appartenant à $]0,\, \pi]$.

6. Donner les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions g et h définies par

$$g(x) = \ln(|a(x)|^2) \text{ et } h(x) = \arctan\left(\frac{\Im(a(x))}{\Re(a(x))}\right).$$

7. En déduire que l'on a, au voisinage de 0, la relation suivante :

$$a(x) = \exp\Big(-i\alpha\, x + i\,\frac{\alpha - \alpha^3}{6}\, x^3 - \frac{\alpha^2 - \alpha^4}{8}\, x^4 + o(x^4)\Big).$$

Il existe donc trois réels α, β et γ strictement positifs et une fonction $\varepsilon : [-\pi,\, \pi] \to \mathbf{C}$, tendant vers 0 quand x tend vers 0 tels que l'on ait, pour tout x dans un voisinage de 0,

$$a(x) = \exp\Big(-i\alpha x + i\beta\, x^3 - \gamma x^4(1 + \varepsilon(x))\Big).$$

On admet que la fonction ε est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\pi,\, \pi]$. Dans toute la suite, on posera

$$d(x) = \exp\Big(-i\alpha x + i\beta\, x^3\Big) \text{ et } b(x) = \exp\Big(-\gamma x^4(1 + \varepsilon(x))\Big),$$

de sorte que $a(x) = d(x)b(x)$ et $|a(x)| = |b(x)|$.

III Majoration des coefficients de a^k

Soit $[r,\, s]$ un segment de longueur non nulle de $\mathbf{R}$, soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe $K > 0$ tel que $|f'(t)| \geqslant K$ pour tout $t \in [r,\, s]$ et que de plus $f''(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [r,\, s]$.

8. Montrer l'inégalité
$$\left| \int_r^s \frac{f''(t)}{(f'(t))^2} \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{2}{K}.$$

9. En intégrant par parties l'intégrale
$$\int_r^s \frac{1}{f'(t)} \Big(f'(t) \cos f(t) \Big) \,\mathrm{d}t,$$
établir que
$$\left| \int_r^s \cos f(t) \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{4}{K}.$$

Dans les question 10 à 12, $[u,\, v]$ désigne un segment de longueur non nulle de $\mathbf{R}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[u,\, v]$, à valeurs réelles. On suppose cette fois que $f''(t) \geqslant M > 0$ pour tout t appartenant à $[u,\, v]$.

10. On suppose que $f'(u) \geqslant 0$. Établir, sur $[u + 2/\sqrt{M},\, v]$, l'inégalité suivante
$$f'(t) \geqslant 2\sqrt{M}.$$

11. En déduire que
$$\left| \int_u^v \cos f(t) \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{4}{\sqrt{M}}.$$
On admettra que le résultat est identique lorsque $f'(v) \leqslant 0$.

12. On suppose que $f'(u)f'(v) < 0$. Montrer qu'il existe un unique réel w de $]u, v[$ tel que $f'(w) = 0$. En déduire que
$$\left| \int_u^v \cos f(t) \,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{8}{\sqrt{M}}.$$

Dans les questions 13 et 14 , ζ désigne un nombre réel, k un entier naturel non nul et $J_{k,\zeta}$ la fonction définie par

$$J_{k,\zeta}(x) = \int_0^x \cos(\zeta t + k\beta t^3)\ \mathrm{d}t,$$

où β est le nombre réel non nul défini après la question 7.

13. Montrer, pour tout x appartenant à $[k^{-1/3}, \pi]$, l'inégalité :

$$\left|\int_{k^{-1/3}}^x \cos(\zeta t + k\beta t^3)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{8k^{-1/3}}{\sqrt{6\beta}}.$$

14. En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$, indépendante de ζ et k, telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation

$$|J_{k,\zeta}(x)| \leqslant C_1 k^{-1/3}.$$

On admet que l'on peut démontrer de la même manière qu'il existe une constante C_2, indépendante de k et ζ, telle que pour tout x de $[0, \pi]$ on ait la relation suivante :

$$\left|\int_0^x \sin(\zeta t + k\beta t^3)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant C_2 k^{-1/3}. \tag{1}$$

15. Montrer qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que pour tout x de $[-\pi, \pi]$, on ait

$$|b(x)| \leqslant \exp(-\lambda x^4).$$

16. Montrer qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que pour tout x de $[-\pi, \pi]$, on ait

$$|b'(x)| \leqslant C_3 |x^3|.$$

17. À l'aide d'une intégration par parties et en utilisant les résultats précédents, montrer qu'il existe une constante C_4 indépendante de n et de k telle que pour tout entier non nul k et pour tout entier relatif n, on ait l'inégalité :

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} J'_{k,\alpha k+n}(x)(b(x))^k\ \mathrm{d}x\right| \leqslant C_4 k^{-1/3}.$$

18. En déduire qu'il existe une constante $C_5 > 0$ indépendante de k et n telle que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $n \in \{-k, \cdots, k\}$, on ait l'inégalité

$$|a_{k,n}| \leqslant C_5\, k^{-1/3}.$$

On admet dorénavant l'existence d'une constante $C_6 > 0$ telle que, pour tout entier k non nul,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a(x)|^{2k}\, \mathrm{d}x \geqslant C_6\, k^{-1/4}.$$

19. Montrer qu'il existe $C_7 > 0$ tel que, pour tout entier k,

$$\|a^k\| \geqslant C_7\, k^{1/12},$$

c'est-à-dire que a n'est pas stable !

FIN DU PROBLÈME