UNIVERSITÉ PAUL SABATIER **2006/2007**

L1 - SDI - FEUILLE 2
REVISIONS D'ALGEBRE LINEAIRE

Exercice 1 *Soit* $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$ *l'application définie par* $f(P) = (P(0), P'(0))$.

1. *Donner la matrice de* f *dans les bases canoniques.*
2. *Déterminer* $Ker(f)$ *et* $Im(f)$.
3. *Montrer que les polynômes* P_1, P_2 *et* P_3 *définis par* $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 1 + X$ *et* $P_3(X) = 1 + X^2$ *forment une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.
4. *Montrer que* $v_1 = (1, 2)$ *et* $v_2 = (2, 5)$ *forment une base de* $\mathbb{R}^2$.
5. *Déterminer la matrice de* f *dans les bases* $\{P_1, P_2, P_3\}$ *et* $\{v_1, v_2\}$.

Exercice 2 *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *l'application définie par* $f(x, y, z) = (x-y+z, -x+y+z, 2z)$.

1. (a) *Montrer que* f *est une application linéaire et déterminer sa matrice* A *dans la base canonique* $\varepsilon = \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$.
   (b) *Déterminer* $Ker(f)$ *et en donner une base. On notera* u_1 *le vecteur de cette base. L'application* f *est-elle injective ? Surjective ?*
2. *Déterminer la dimension de* $Im(f)$ *et montrer que les vecteurs* $u_2 = f(e_2) = (-1, 1, 0)$ *et* $u_3 = f(e_3) = (1, 1, 2)$ *en forment une base.*
3. *Montrer que* $Im(f) = Ker(f - 2\mathrm{Id})$ *(on calculera* $f(u_2)$ *et* $f(u_3)$*).*
4. *Démontrer que* $\chi = \{u_1, u_2, u_3\}$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *et determiner la matrice* D *de* f *dans cette base.*
5. *Donner une matrice* P *inversible telle que* $D = P^{-1}AP$.

Exercice 3 $E = \mathbb{R}^3$, $F = Vect((1, 1, 1); (0, 1, 1))$, $G = Vect((1, 0, 1))$. *Montrer que* $E = F \oplus G$ *; exprimer les projecteurs associés.*

Exercice 4 *On considère* f *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *qui vérifie* $f \circ f \circ f = 0$ *et* $f \circ f \neq 0$.

1. *Montrer qu'il existe* $x \in \mathbb{R}^3$ *tel que la famille* $B = \{x, f(x), f \circ f(x)\}$ *soit une base de* $\mathbb{R}^3$. *Quelle est la matrice de* f *dans cette base ?*
2. *Déterminer une base de* $Im(f)$. *Quelle est la dimension de* $Ker(f)$ *?*

Exercice 5 *Soit* E *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit* $f : E \to E$ *l'endomorphisme défini par* $f(P) = P'$. *Montrer que* f *est surjectif mais n'est pas injectif.*

Exercice 6 *Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soit $f : E \to E$ l'endomorphisme défini par $f(P) = X \cdot P$. Montrer que f est injectif mais n'est pas surjectif.*

Exercice 7 *Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
Montrer que $A = \{$fonctions paires$\}$ et $B = \{$fonctions impaires$\}$ sont des s.e.v. de E et que

$$A \oplus B = E.$$

Exercice 8 *Déterminer le rang des matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 9 & 15 \\ -5 & 11 & 14 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 *Calculer l'inverse des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 *On considére la matrice suivante*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que A est inversible (on pourra considérer l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est A et étudier l'image de $\mathcal{B}$ par f).*
2. *Calculer A^4. En déduire A^{-1}.*

Exercice 11 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$A \cup B = A + B$*
2. *$A \cup B$ est un sous-espace vectoriel de E*
3. *$A \subset B$ ou $B \subset A$.*