Exercices

Exercice 1. Montrer de deux manières que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x < 0$ et $f(x) = 2$ si $x \geq 0$ n'est pas continue en 0:

a) en revenant à la définition

b) en utilisant des suites.

Exercice 2. En utilisant les suites $\left(x_n = \dfrac{1}{2n\pi}\right)$ et $\left(y_n = \dfrac{1}{(2n+1)\pi}\right)$, montrer que $x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 3. Etudier l'ensemble de définition et la continuité de chacune des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto e^{1/(1+x^2)}$.

b) $f_2 : x \mapsto \sin(x^4 + 1)$.

c) $f_3 : x \mapsto \dfrac{\ln(x^3 - 1)}{(2 + \sin x) \cdot (x^4 + 1)}$.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes puis étudier sur quels ensembles elles sont prolongeables par continuité.

a) $f : x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}$.

b) $g : x \mapsto \dfrac{-5x^2 + 4x + 1}{x^2 - 1}$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) &= x^3 - 4x + 2 \quad \text{si } x \geq 0 \\ f(x) &= |x^3 + 2| \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1, 2]$.

c) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$.

d) Montrer que f est continue en 0.

Exercice 6. Montrer que l'équation $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1, 1[$. Même question avec $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$.

Exercice 7. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(x) = f(x) - x$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 8 (*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(x_0)) = x_0$. Montrer qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) = x_1$.

Indication: on pourra considérer les trois cas $x_0 < f(x_0)$, $x_0 = f(x_0)$ et $x_0 > f(x_0)$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires .

Exercice 9. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait $f(x) > 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) \geq m$.

Exercice 10. Soit f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$ telles que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) + m < g(x)$.

Exercice 11 (*). Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polynôme de degré impair. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 0$.

Exercice 12 (*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ existent et sont finies. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (*). Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \sup(f(x), g(x))$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (*). Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-1, 1]$ telle que $f(-1) = f(1) = 0$, $f(1/2) = 1$ et $f(-1/2) = -1$. Montrer que f est bornée sur $[-1, 1]$ et atteint ses bornes sur $]-1, 1[$.

Exercice 15 (*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en -1 et satisfaisant à l'égalité fonctionnelle suivante: pour tout réel x, $f(2x + 1) = f(x)$. Le but de cet exercice est de montrer que f est constante.

1) Montrer que pour tout réel t on a: $f(\frac{t-1}{2}) = f(t)$.
2) Soit t réel. On définit la suite (u_n) par $u_0 = t$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$ pour $n \geq 1$.
   a) Montrer que si la suite (u_n) converge vers a, alors $a = -1$.
   b) Montrer que la suite $(1 + u_n)$ est une suite géométrique de raison $1/2$ et en déduire la convergence de la suite (u_n) vers -1.
   c) Montrer (par récurrence) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(t) = f(u_n)$ et en déduire que $f(t) = f(-1)$.
3) Conclure.