

Suites



1 Suites, suites réelles

1.1 Généralités

Définition 1.1. Soit E un ensemble. Une **suite d'éléments de E** est une application \mathbb{N} dans E . On peut noter $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de E .

En général, pour une suite, on met l'argument en indice plutôt qu'entre parenthèses. Ainsi, si u est une suite d'éléments de E , on notera u_n plutôt que $u(n)$, et la suite elle-même est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par ailleurs, on pourra dire que u_n est le n -ième terme de la suite.

Une suite peut être indexée par \mathbb{N}^* (où même par $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ où n_0 est un entier naturel quelconque) plutôt que \mathbb{N} .

On appelle **suite réelle** une suite d'éléments de \mathbb{R} , et **suite complexe** une suite d'éléments de \mathbb{C} . Ces suites sont l'objet de ce chapitre.

Définition 1.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- (i) On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée s'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée. C'est le cas si et seulement s'il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples 1.3. — Une suite à valeurs positives est en particulier minorée.

— La suite $((-1)^n n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est ni minorée, ni majorée.

— La suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

1.2 Exemples de suites définies par récurrence : les suites arithmético-géométriques

Proposition 1.4. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

- (i) On suppose que $u_{n+1} = u_n + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = u_0 + na.$$

JULIEN ROYER
UNIVERSITÉ PAUL SABATIER - TOULOUSE 3
Version du 8 mars 2023

(ii) On suppose que $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = q^n u_0.$$

(iii) On suppose que $u_{n+1} = qu_n + a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = q^n(u_0 - \rho) + \rho, \quad \text{où } \rho = \frac{a}{1-q}.$$

Démonstration. Les deux premières assertions sont des récurrences faciles. On montre la dernière pour $q \neq 1$. Soit $\rho \in \mathbb{R}$ à déterminer. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n - \rho$. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \rho = qu_n + a - \rho = qv_n + q\rho + a - \rho.$$

On choisit alors ρ comme dans l'énoncé, de sorte que pour $n \in \mathbb{N}$ on obtient

$$v_{n+1} = qv_n.$$

On a alors $v_n = q^n v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où

$$u_n = v_n + \rho = q^n v_0 + \rho = q^n(u_0 - \rho) + \rho. \quad \square$$

2 Définition de la limite d'une suite réelle

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Intuitivement, on dit que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si u_n est très proche de ℓ quand n devient très grand. Le problème est que les notions d'être « très proches » ou « très grand » n'ont pas de sens précis et ne sont donc pas exploitables pour faire des raisonnements rigoureux. Qu'est-ce qu'être très proches pour deux réels ? Être à distance inférieure à $1/10$, à $1/1000$, à $1/10^{42}$? Et à partir de quand considère-t-on qu'un entier est grand ? Quand il est plus grand que 2, que 15, que 10 000, que $6,02 \cdot 10^{23}$?

Pour considérer que u_n tend vers ℓ , il faut donc que pour n'importe quelle façon de mesurer le fait que u_n est proche de ℓ (autrement dit, on peut prendre la condition $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ pour n'importe quel $\varepsilon > 0$), il faut que ce soit valable pour n assez grand (c'est-à-dire $n \geq N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$). Avec les quantificateurs, cela donne la définition suivante :

Définition 2.1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que u_n tend (ou converge) vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon. \quad (2.1)$$

Remarque 2.2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ si et seulement si $(u_n - \ell)$ tend vers 0.

L'ordre des quantificateurs est crucial. Il est extrêmement important de noter que N peut dépendre de ε . Sauf cas très particuliers (lesquels?), on ne peut pas trouver un N qui convient à tous les ε . Mais avoir pour chaque $\varepsilon > 0$ un N qui convient est bien moins contraignant. Pour bien s'en souvenir on peut choisir, au moins dans un premier temps, de marquer explicitement la dépendance en ε de N :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Exemple 2.3. En guise d'exemple, montrons que

$$\frac{1}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il faut montrer qu'une certaine propriété est vraie pour n'importe quel $\varepsilon > 0$. On en fixe un, mais ce qui suit doit être valable pour n'importe quel choix. Ce choix étant fait, il faut trouver un rang N_ε (qui peut dépendre du choix de ε) à partir duquel on aura toujours

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leq \varepsilon. \quad (2.2)$$

Le plus simple est de donner directement N_ε et de prouver (2.2) pour tout $n \geq N_\varepsilon$. Le problème est qu'il n'est pas forcément évident de deviner quel N_ε va convenir. Au brouillon on va donc fixer un N , faire le calcul et voir ce que ça donne. Étant donné $N \in \mathbb{N}$ on a pour tout $n \geq N$

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leq \frac{1}{N+1}.$$

Pour obtenir (2.2), il suffit donc d'avoir choisi N tel que

$$\frac{1}{N+1} \leq \varepsilon,$$

ce qui est équivalent à

$$N \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Pour N_ε on peut donc choisir n'importe quel entier plus grand que $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ (par exemple, on peut le prendre plus grand que $\frac{1}{\varepsilon}$). Une fois qu'on a compris cela, on peut rédiger notre démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Pour tout $n \geq N_\varepsilon$ on a

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leq \frac{1}{N_\varepsilon + 1} \leq \frac{1}{N_\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3 Premières propriétés des suites convergentes

Une grande partie de ce chapitre sera dédiée à des résultats permettant de *montrer* qu'une suite est convergente et, si possible, de calculer sa limite. Mais les deux propositions de ce paragraphe, qui seront utiles par la suite mais qui ont leur intérêt propre, sont des exemples de propriétés que l'on peut *déduire* du fait qu'une suite est convergente.

Proposition 3.1. *Une suite convergente est bornée.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. On note ℓ sa limite. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq 1. \quad (3.1)$$

Pour tout $n \geq N$ on a par l'inégalité triangulaire

$$|u_n| = |(u_n - \ell) + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell|.$$

On note

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|).$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n| \leq M$. Cela prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. \square

Remarque 3.2. La réciproque de la proposition 3.1 n'est pas vraie, une suite peut être bornée sans admettre de limite. Considérer par exemple la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 3.3. La démonstration de la proposition 3.1 est instructive. Il y a deux arguments pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Tout d'abord, pour n grand, $|u_n|$ ne peut pas être arbitrairement grand puisque u_n est proche par hypothèse d'une certaine limite ℓ . Mais cela ne vaut que pour n grand, $|u_n|$ n'a aucune raison d'être proche de $|\ell|$ pour les autres n . Mais les autres n ne sont qu'en nombre fini, et un ensemble fini de réels est nécessairement borné. Il est important de noter qu'il faut d'abord fixer ce que l'on entend par « n grand », et seulement ensuite il est possible de parler des « autres n ».

Bien sûr, tout cela se fait en termes plus précis. Ici on n'a pas tellement besoin du fait que u_n est « proche » de ℓ pour s'assurer que $|u_n|$ ne prend pas des valeurs arbitrairement grandes, mais seulement du fait que u_n « ne s'éloigne pas trop » de ℓ . Ainsi, pour écrire (3.1), on a simplement appliqué la définition de la limite dans le cas particulier où $\varepsilon = 1$. Ce n'est pas si fréquent, mais il peut arriver qu'on utilise un choix particulier de ε dans un raisonnement abstrait. On note qu'ici le choix est complètement arbitraire. Au lieu de 1 on aurait pu prendre 47 ou 12000, la démonstration aurait été tout autant valable.

La définition appliquée avec $\varepsilon = 1$ fixe donc un certain N , au delà duquel n est « assez grand ». Les autres termes sont alors u_0, \dots, u_{N-1} , qui sont effectivement en nombre fini.

Proposition 3.4. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.*

- (i) *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement positive alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$ pour tout $n \geq N$.*
- (ii) *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite strictement négative alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 0$ pour tout $n \geq N$.*
- (iii) *Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite non nulle alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \neq 0$ pour tout $n \geq N$.*

Démonstration. On ne montre que la première propriété. La deuxième est analogue et la troisième est conséquence directe des deux premières (s'en convaincre en guise d'exercice). Puisque u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}.$$

Pour $n \geq N$ on a alors

$$u_n \geq \ell + (u_n - \ell) \geq \ell - \frac{\ell}{2} > 0. \quad \square$$

Remarque 3.5. Si on suppose seulement que $\ell \geq 0$ ou $\ell \leq 0$, alors on ne peut rien conclure. Par exemple, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

tend vers 0 alors que ses termes d'indices pairs sont strictement positifs et ses termes d'indices impairs sont strictement négatifs.

Remarque 3.6. À nouveau, on a utilisé dans cette démonstration la définition de la limite avec un choix particulier de ε , qui n'est pas forcément « petit ». C'est d'ailleurs pour cette étape qu'on utilise le fait que ℓ est strictement positif.

Remarque 3.7. Il est important de noter que dans ces deux propositions on obtient des propriétés pour une suite convergente sans connaître sa limite. Pour la proposition 3.1 on suppose simplement que la suite est convergente, et pour la proposition 3.4 on a tout de même une information sur le signe de la limite.

4 Opérations sur les limites

Vérifier directement la définition comme on a fait à l'exemple 2.3 peut très vite s'avérer fastidieux pour montrer la convergence de suites un peu plus compliquées. On va maintenant montrer un certain nombre de propriétés abstraites permettant de déduire des limites de suites connaissant des limites d'autres suites plus simples.

On commence par étudier la limite de la somme de deux suites convergentes. Il est intuitivement clair que si u_n s'approche de ℓ_1 et v_n s'approche de ℓ_2 pour n grand, alors $(u_n + v_n)$ s'approche de $(\ell_1 + \ell_2)$. Reste à le formaliser rigoureusement...

Proposition 4.1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_2.$$

Alors

$$u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1 + \ell_2.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme u_n tend vers ℓ_1 il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.1)$$

De même, puisque v_n tend vers ℓ_2 il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.2)$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$ on a par l'inégalité triangulaire

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(u_n - \ell_1) + (v_n - \ell_2)| \leq |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (4.3)$$

Cela prouve que $(u_n + v_n)$ tend bien vers $(\ell_1 + \ell_2)$ quand n tend vers $+\infty$. \square

Remarque 4.2. En (4.1) et (4.2) on a utilisé la définition de la convergence en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$. C'est tout à fait possible. En effet, la définition de la limite peut être lue comme « pour tout réel strictement positif, il existe un rang à partir duquel ... ». Étant donné $\varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{2}$ est bien un réel strictement positif, donc il existe bien un rang $N = N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ à partir duquel on a (4.1) ou (4.2). Cela permet de bien arriver à ε dans (4.3). Il est aussi possible de partir avec des ε en (4.1) et (4.2) et de finir avec 2ε dans (4.3), c'est équivalent.

Dans la proposition suivante, on formalise la propriété intuitivement claire que le produit d'un réel qui devient petit et d'un réel qui ne devient pas trop grand est petit.

Proposition 4.3. *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Alors $u_n v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Pour tout $n \geq N$ on a alors

$$|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \times M = \varepsilon.$$

Cela prouve que $u_n v_n$ tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$. \square

Dans les deux propositions suivantes, on va montrer le bon comportement des limites vis-à-vis des produits et des quotients. Pour les démonstrations, on ne va (presque) pas utiliser la définition mais plutôt les propriétés élémentaires vues précédemment. On note tout de même qu'on pourrait en fait faire directement les preuves avec la définition...

Proposition 4.4. *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que*

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1 \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_2.$$

Alors

$$u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1 \ell_2.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n v_n - \ell_1 \ell_2 = (u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2).$$

Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée d'après la proposition 3.1. D'autre part la suite $(\ell_1)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante donc bornée. Puisque $(u_n - \ell_1)$ et $(v_n - \ell_2)$ tendent vers 0 (voir la remarque 2.2), on obtient par la proposition 4.3 que

$$(u_n - \ell_1) v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

et

$$\ell_1(v_n - \ell_2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

D'après la proposition 4.1 on obtient

$$(u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

et donc

$$u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_1 \ell_2. \quad \square$$

Dans le cas particulier où l'une des deux suites est constante (et donc convergente), on obtient le résultat suivant :

Corollaire 4.5. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\lambda u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \ell.$$

Proposition 4.6. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui ne s'annule pas et converge vers $\ell \in \mathbb{R}^*$. Alors*

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\ell}.$$

Démonstration. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}.$$

Pour tout $n \geq N$ on a alors par la deuxième inégalité triangulaire¹

$$|u_n| \geq |\ell| - |u_n - \ell| \geq \frac{|\ell|}{2},$$

et donc

$$\frac{1}{|u_n|} \leq \frac{2}{|\ell|}.$$

Cela prouve que la suite $1/u_n$ est bornée (par $\max(1/|u_0|, \dots, 1/|u_{N-1}|, 2/|\ell|)$). Pour $n \in \mathbb{N}$ on écrit maintenant

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - u_n}{u_n \ell}$$

Comme $(u_n - \ell)$ tend vers 0 et $1/(u_n \ell)$ est borné, on obtient par la proposition 4.3 que

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. □

En combinant la proposition 4.4 avec la proposition 4.6 on obtient la proposition suivante :

Proposition 4.7. *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers les réels ℓ_1 et ℓ_2 . On suppose que $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\ell_2 \neq 0$. Alors*

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\ell_1}{\ell_2}.$$

1. Ce qu'on fait jusqu'ici est essentiellement identique à la démonstration de la proposition 3.4.

5 Limites infinies

On introduit maintenant les limites infinies. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si u_n devient grand quand n devient grand. Une définition exploitable est la suivante :

Définition 5.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

— On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

si

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \geq \eta.$$

— On dit que u_n tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on note

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

si

$$\forall \eta \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \leq -\eta.$$

\triangleleft Une suite qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ n'est pas considérée comme convergente !

Remarque 5.2. u_n tend vers $-\infty$ si et seulement si $-u_n$ tend vers $+\infty$.

Proposition 5.3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- (i) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (en particulier, si elle est convergente) et v_n tend vers $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.
- (ii) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (en particulier, si elle est convergente) et v_n tend vers $-\infty$, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. On montre la première propriété. Soit $\eta \in \mathbb{R}$. Soit $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme v_n tend vers $+\infty$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$v_n \geq \eta + M.$$

Pour $n \geq N$ on a alors

$$u_n + v_n \geq -M + (\eta + M) = \eta.$$

Cela prouve que $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$. □

Remarque 5.4. Si u_n tend vers $+\infty$ et si v_n tend vers $-\infty$, alors on ne peut rien dire en général pour $(u_n + v_n)$ (qui peut être convergente, tendre vers $+\infty$, tendre vers $-\infty$, ou n'avoir aucune limite).

Proposition 5.5. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

- (i) Si u_n tend vers une limite strictement positive ou vers $+\infty$ et si v_n tend vers $+\infty$, alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.
- (ii) Si u_n tend vers une limite strictement négative ou vers $-\infty$ et si v_n tend vers $+\infty$, alors $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.
- (iii) Si u_n tend vers une limite strictement positive ou vers $+\infty$ et si v_n tend vers $-\infty$, alors $(u_n v_n)$ tend vers $-\infty$.

(iv) Si u_n tend vers une limite strictement négative ou vers $-\infty$ et si v_n tend vers $-\infty$, alors $(u_n v_n)$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. On montre la première propriété dans le cas où u_n tend vers une limite finie. On note $\ell > 0$ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme on l'a vu pour la preuve de la proposition 3.4, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$ on a

$$u_n \geq \frac{\ell}{2}.$$

Soit maintenant $\eta > 0$. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in N_2$ on a

$$v_n \geq \frac{2\eta}{\ell}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geq N$ on a alors

$$u_n v_n \geq \frac{\ell}{2} \times \frac{2\eta}{\ell} = \eta.$$

Cela prouve que $u_n v_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. □

Remarque 5.6. Si u_n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et si v_n tend vers 0, alors on ne peut rien dire en général pour $(u_n v_n)$.

6 Limite et relation d'ordre

On a fait à la proposition 3.4 un lien entre le signe des termes d'une suite convergente et le signe de sa limite. Plus précisément, on a déduit du signe de la limite le signe des termes de la suite (du moins ceux d'indice assez grand). Inversement, connaissant le signe des termes d'une suite convergente on peut en déduire le signe de la limite.

Proposition 6.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et ℓ sa limite.

- (i) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq N$, alors $\ell \geq 0$.
- (ii) S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq N$, alors $\ell \leq 0$.

⚠ Il est important de noter que même si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors on ne peut pas conclure que $\ell > 0$. Considérer par exemple la suite définie par $u_n = 2^{-n}$.

Plutôt que de comparer une suite à 0, on peut comparer deux suites entre elles. On obtient que si une suite convergente est toujours inférieure à une autre, alors sa limite est inférieure à celle de l'autre suite.

Proposition 6.2 (Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant vers les réels ℓ_1 et ℓ_2 , respectivement. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\ell_1 \leq \ell_2.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $w_n = v_n - u_n$. On a alors $w_n \geq 0$. D'après le corollaire 4.5 et la proposition 4.1 on a

$$w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell_2 - \ell_1.$$

Par ailleurs, d'après la proposition 6.1 la limite de w_n quand n tend vers $+\infty$ est positive ou nulle. Cela prouve que

$$\ell_1 \leq \ell_2.$$

□

La proposition suivante exploite à nouveau la comparaison entre des suites, en disant que si une suite est coincée entre deux suites qui convergent vers la même limite, alors elle tend elle-même vers cette limite quand n tend vers $+\infty$. Il faut noter que la convergence de la suite est déjà un résultat important dans cette conclusion.

Proposition 6.3 (Théorème des gendarmes). (i) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

On suppose que u_n et w_n tendent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$. Alors v_n tend également vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

(ii) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n \leq v_n.$$

$$\text{— Si } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ alors } v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

$$\text{— Si } v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty \text{ alors } u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty.$$

Démonstration. On montre la première partie de la proposition. La deuxième est laissée en exercice. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on a

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on a

$$|w_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq N$ on a alors

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon,$$

et donc

$$|v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell.$$

□

7 Suites monotones

Définition 7.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit qu'elle est

- croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- strictement croissante si $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- strictement décroissante si $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 7.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. Alors

- (i) soit elle est majorée, et alors elle est convergente,
- (ii) soit elle n'est majorée et alors elle tend vers $+\infty$.

On a un résultat analogue pour une suite réelle décroissante.

Démonstration. • On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. On note alors

$$s = \sup \{u_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq s$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq s - \varepsilon$. Comme la suite est croissante, on a alors $u_n \geq s - \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Finalement, pour tout $n \geq N$ on a

$$s - \varepsilon \leq u_n \leq s,$$

ce qui prouve que u_n tend vers s quand n tend vers $+\infty$.

• On suppose maintenant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Soit $\eta \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq \eta$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a alors pour tout $n \geq N$

$$u_n \geq u_N \geq \eta.$$

Cela prouve que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. □

Proposition 7.3 (Suites adjacentes). Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que

$$b_n - a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Alors les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leq b_n \leq b_0$, donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Comme elle est croissante, elle admet une limite, qu'on note ℓ_1 . De même la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par a_0), donc elle tend vers une limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Montrons maintenant que $\ell_1 = \ell_2$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$ on a $|a_n - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_2$ on a $|b_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Enfin il existe N_3 tel que pour $n \geq N_3$ on a $|b_n - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On note $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Pour $n \geq N$ on a alors

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que $\ell_1 - \ell_2 = 0$, et donc que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même limite. □

8 Suites extraites

On se donne une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En extraire une sous suite consiste à définir une nouvelle suite en ne gardant que certains termes de la suite d'origine.

Définition 8.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de la forme

$$(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}},$$

où φ est une fonction strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} (on dit que φ est une extraction).

Exemples 8.2. — Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n = (-1)^n$ et $v_n = u_{2n}$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1 (dans ce cas φ est l'application $n \mapsto 2n$, on ne garde que les termes d'indices pairs).

Remarque 8.3. Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors par récurrence on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n) \geq n$.

Proposition 8.4. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que u_n converge vers ℓ . Alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ .

Remarque 8.5. On a des résultats analogues pour des suites qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

La proposition dit simplement que si tous les termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'approchent de ℓ pour n grand, c'est en particulier le cas pour les termes que l'on a extraits.

Remarque 8.6. On a des résultats analogues pour des suites qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Remarque 8.7. En particulier, si u_n tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ on obtient que u_{n+p} tend également vers ℓ .

Démonstration. On suppose que u_n tend vers ℓ et on considère une extraction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on a

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq N$ on a alors (voir la remarque 8.3) $\varphi(n) \geq n \geq N$ et donc

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que $u_{\varphi(n)}$ tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. □

Par contraposée de la proposition 8.4 on obtient le résultat suivant, souvent utile pour montrer qu'une suite n'est pas convergente :

Corollaire 8.8. Si une suite admet une sous-suite qui ne converge pas, ou bien si elle admet deux sous-suites extraites qui convergent vers des limites différentes, alors elle n'est pas convergente.

Théorème 8.9 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit par récurrence une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et une extraction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

- il y a une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}$ tels que $u_k \in [a_n, b_n]$,
- $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$
- et

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

On considère $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \in [a_0, b_0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on note $\varphi(0) = 0$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose avoir construit $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ et $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$. On note $c_n = (a_k + b_k)/2$. S'il y a une infinité d'indices k tels que $u_k \in [a_n, c_n]$ on note $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Sinon, Par hypothèse de récurrence il y a nécessairement une infinité d'indices k tels que $u_k \in [c_n, b_n]$ et on note $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$. Dans les deux cas on a bien

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

et

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}.$$

En outre on peut choisir $\varphi(n+1)$ plus grand que $\varphi(n)$ et tel que $u_{\varphi(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes (elles vérifient les hypothèses de la proposition 7.3) donc elles convergent vers une limite commune qu'on note ℓ .

Comme $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient, par le théorème des gendarmes (proposition 6.3),

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Ainsi la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. □

Définition 8.10. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a . Autrement dit, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

$$u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Exemple 8.11. La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérence : 1 et -1 .

Les résultats suivants sont de simples reformulations des propriétés discutées ci-dessus.

- (i) Une suite convergente admet une unique valeur d'adhérence, sa limite.
- (ii) Une suite qui admet au moins deux valeurs d'adhérence n'est pas convergente.
- (iii) Une suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

9 Suites de Cauchy

On a vu dès la partie 2 que si l'on veut montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, il faut d'abord deviner sa limite ℓ pour ensuite pouvoir estimer la différence $u_n - \ell$. Autrement dit, il faut déjà plus ou moins connaître la limite pour prouver qu'une suite est convergente. C'est problématique, car en général on ne connaît pas la limite (c'est l'objet de l'étude...).

C'est d'autant plus regrettable quand dans certaines situations on a simplement besoin de savoir qu'une suite est convergente sans avoir à se préoccuper de la valeur explicite de la limite (voir par exemple les résultats du paragraphe 3). Il arrive aussi qu'on s'intéresse à la valeur de la limite, mais qu'elle ne puisse pas être obtenue. Dans ce cas il peut déjà être intéressant de savoir si la suite est convergente ou non. Et une fois qu'on a assuré l'existence d'une limite, on peut commencer à en chercher des propriétés. Ce dernier cas de figure est en fait extrêmement fréquent dans les problèmes d'analyse.

Il serait donc utile de pouvoir montrer qu'une suite est convergente sans avoir à connaître à l'avance sa limite.

Définition 9.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m, p \geq N, \quad |u_m - u_p| \leq \varepsilon.$$

La condition pour être une suite de Cauchy ressemble un peu à la condition pour une suite converger vers une certaine limite, mais elle ne porte que sur les termes de la suite eux-même et ne fait intervenir aucun paramètre ℓ à deviner. Ici on demande non pas que pour n grand les termes de la suite se rapprochent d'une certaine limite, mais qu'ils deviennent proche les uns des autres. On commence par observer que si les termes d'une suite s'approchent tous d'un certain ℓ , alors ils sont en particulier proches les uns des autres :

Proposition 9.2. *Une suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergant vers une limite $\ell \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $m, p \geq N$ on a alors par l'inégalité triangulaire

$$|u_m - u_p| = |(u_m - \ell) - (u_p - \ell)| \leq |u_m - \ell| + |u_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Cette observation mérite d'être faite, elle sera d'ailleurs vraie au-delà du cadre des suites réelles ou complexes, mais ce n'est pas ce dont on a besoin. En effet cette proposition prend en hypothèse une propriété difficile à vérifier (la suite est convergente) et donne comme conclusion une propriété plus facile (la suite est de Cauchy). Ce dont on a besoin est en fait la réciproque de la proposition 9.2.

On commence par montrer qu'une suite de Cauchy est bornée. Cela ressemble à la propriété analogue vue pour les suites convergentes (proposition 3.1) et la démonstration (laissée en exercice) utilise d'ailleurs le même argument.

Proposition 9.3. *Une suite réelle de Cauchy est bornée.*

La deuxième propriété importante des suites de Cauchy est que l'existence d'une sous-suite convergente assure la convergence de la suite dans sa globalité (en gros, si les termes de la suite sont proches les uns des autres à l'infini et que certains d'entre eux sont proches d'une certaine limite ℓ , alors tous les termes sont proches de cette limite).

Proposition 9.4. *Une suite réelle de Cauchy admettant une sous-suite convergente est elle-même convergente.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy. Soient $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que $u_{\varphi(n)}$ tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. On montre que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on a

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geq N_2$ on a

$$|u_n - u_p| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$. On a $\varphi(n) \geq n \geq N$ donc

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cela prouve que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. □

On a maintenant tous les ingrédients pour montrer qu'une suite réelle de Cauchy est convergente. Une suite de Cauchy est bornée, par le théorème de Bolzano Weierstrass elle admet une sous-suite convergente, et est donc elle-même convergente.

Théorème 9.5. *Une suite réelle de Cauchy est convergente.*

On observe qu'en combinant la proposition 9.2 et le théorème 9.5, on obtient qu'une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

10 Comparaison de suites

Le but des notions que l'on va introduire dans ce paragraphe est de raffiner la notion de convergence, en ne s'intéressant pas seulement à la limite d'une suite mais aussi à la vitesse de convergence vers cette limite. Par exemple, si on se donne une suite qui tend vers $+\infty$, on voudrait discuter le fait qu'elle tend « vite » ou « lentement » vers $+\infty$.

De même qu'on n'a pas de notion de réel grand et de réel petit, on ne pourra pas dire qu'une suite converge rapidement ou lentement. Si on considère la suite u_n définie par $u_n = n^3$ pour tout n , cela n'a pas de sens de dire que u_n tend vite ou lentement vers $+\infty$.

Par contre, de même qu'on peut comparer les réels entre eux, on peut comparer les vitesses de convergence de deux suites. Ainsi, si pour $n \in \mathbb{N}$ on note $v_n = n^2$ et $w_n = n^5$, alors u_n, v_n et w_n tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, mais on peut être plus précis et ajouter que u_n tend vers $+\infty$ plus vite que v_n et moins vite que w_n .

On peut, de la même façon, comparer les vitesses de convergence de suites qui tendent vers 0. Ainsi, n^{-2} tend plus vite que n^{-1} et moins vite que n^{-3} vers 0.

Pour comparer la vitesse de convergence de deux suites, on regarde simplement le comportement de leur rapport pour n grand :

Définition 10.1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas. On dit u_n est négligeable devant v_n et on note

$$u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n) \quad (10.1)$$

(ce qui se lit « u_n est un petit o de v_n quand n tend vers $+\infty$ ») si

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (10.2)$$

On remarque que cette définition ne fait pas intervenir les limites (finies ou infinies) des suites u_n et v_n . D'ailleurs on ne suppose même pas qu'elles en admettent une.

Exemple 10.2. (i) Soient α et β deux réelles tels que $\alpha < \beta$. Alors on a

$$n^\alpha = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^\beta).$$

(ii) Soient α et β deux réelles tels que $\alpha < \beta$. Alors on a

$$e^{\alpha n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(e^{\beta n}).$$

Pour les démonstrations, il suffit de considérer les quotients correspondants et de vérifier qu'ils convergent effectivement vers 0.

À ce stade il est légitime de se demander quelle est l'intérêt de la notation (10.1) par rapport à (10.2). Avant d'aller plus loin, on introduit une autre façon de voir la notion de négligeabilité.

Proposition 10.3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas. Alors

$$u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$$

si et seulement si il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = v_n \varepsilon_n.$$

Démonstration. On suppose qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que $u_n = v_n \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$\frac{u_n}{v_n} = \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui signifie que $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$. Inversement on suppose que $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\varepsilon_n = u_n/v_n$, de sorte que $u_n = \varepsilon_n v_n$. On a alors

$$\varepsilon_n = \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad \square$$

La notation « petit o » ne sera pas seulement utilisée pour dire qu'une suite est négligeable par rapport à une autre. Elle servira également dans les calculs. Ainsi la notation $o(v_n)$ désignera tout terme qu'on ne veut pas expliciter et dont on veut seulement se souvenir qu'il est négligeable devant v_n .

Exemple 10.4. En guise d'exemple, on cherche à calculer la limite éventuelle quand n tend vers $+\infty$ de

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Avant de lire la suite, essayez de voir si vous pouvez deviner la limite avec les outils usuels de terminale.

⋮

Un raisonnement plus ou moins intuitif serait de dire que $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1, et que $1^n = 1$ tend vers 1, donc par composition de limites, $(1 + \frac{1}{n})^n$ tendrait vers 1. Une autre façon de penser serait de dire qu'on prend la puissance de plus en plus grande d'un nombre strictement plus grand que 1, donc on obtient quelque chose qui tend vers $+\infty$.

⋮

Ces deux points de vue sont bien évidemment incompatibles et montrent que la question est plus subtile qu'il n'y paraît. Il nous faut donc faire un raisonnement plus fin pour faire la part des choses entre la puissance qui devient grande et l'écart entre $1 + \frac{1}{n}$ et 1 qui devient petit.

On commence par écrire

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

C'est un réflexe très utile dès qu'une variable intervient dans une puissance. Les fonctions *exponentielle* et *logarithme* sont déjà connues mais seront introduites au chapitre sur les *fonction d'une variable réelle*.

Il faut donc commencer par comprendre comment se comporte $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1 et que la fonction logarithme est *continue* (voir le chapitre sur les fonctions d'une variable réelle), on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais cela ne permet pas de déterminer le comportement asymptotique de

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

qui est donc le produit d'un facteur qui tend vers $+\infty$ avec un facteur qui tend vers 0. C'est pour cela qu'on a besoin de savoir à *quelle vitesse* $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ tend vers 0. Par exemple, si ce terme se comporte comme $1/n^2$, le produit avec n convergera vers 0, s'il se comporte comme $47/n$, alors le produit avec n convergera vers 47, et s'il se comporte comme $1/\sqrt{n}$ alors le produit avec n tendra vers $+\infty$. Cette étude plus précise de la fonction logarithme près de 1 sera l'objet du paragraphe sur les *développements limités* que l'on verra au chapitre sur les fonctions d'une variable réelle. En attendant, on admet provisoirement que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (10.3)$$

Autrement dit, il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n}. \quad (10.4)$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right). \quad (10.5)$$

On note que par rapport à (10.3), on s'est un peu éloigné de la notation (10.1). On continue avec l'écriture (10.4). On peut alors écrire

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = n \left(\frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \right) = 1 + \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On a donc levé l'indétermination observée plus haut. Par *continuité* de la fonction exponentielle, on obtient finalement

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \exp(1 + \varepsilon_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e.$$

Avec les petits o on peut écrire tout cela de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = \exp \left(n \left(\frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) = \exp \left(1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (1) \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e. \end{aligned}$$

Pour ce petit calcul la notation ε_n convient parfaitement, et on peut encore discuter l'intérêt de la notation (10.5). Cela apparaîtra plus clairement pour des calculs plus longs, où il faudrait introduire plein de suites $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ différentes. On y reviendra dans le chapitre sur les fonctions, pour les calculs de développements limités.

Après le « petit o », on introduit maintenant le « grand O ». La notion est analogue, mais au lieu de dire qu'une suite est « significativement plus petite » qu'une autre, on dit qu'elle n'est « pas significativement plus grande » :

Définition 10.5. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas. On dit u_n est dominée par v_n et on note

$$u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} (v_n)$$

(« u_n est un grand O de v_n quand n tend vers $+\infty$ ») s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n| \leq M |v_n|.$$

On commence par observer que si une suite est négligeable devant une autre, elle est en particulier dominée par cette suite. Cela résulte simplement du fait qu'une suite qui tend vers 0 est bornée (voir Proposition 3.1).

Proposition 10.6. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si

$$u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (v_n)$$

alors

$$u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} (v_n).$$

Remarque 10.7. La notion de domination est a priori plus faible que la notion de négligeabilité, mais on peut l'utiliser pour donner des estimées plus fines en comparant à une suite plus petite. Par exemple, si on veut comparer $4n^3 + 5n^6$ à une puissance de n , le mieux que l'on puisse faire avec des petits o est

$$\forall \alpha > 6, \quad 4n^3 + 5n^6 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^\alpha).$$

Alors qu'avec un grand O on peut simplement dire

$$4n^3 + 5n^6 = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(n^6).$$

C'est plus simple et plus fin (car toute suite dominée par n^6 est en particulier négligeable devant n^α pour tout $\alpha > 6$). D'où l'intérêt de cette nouvelle notion.

On termine ce paragraphe avec une dernière notion utile pour comparer les suites entre elles :

Définition 10.8. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles ne s'annulant pas. On dit que ces deux suites sont équivalentes et on note

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, deux suites sont équivalentes si elles ont le « même comportement » pour n grand. Il est souvent utile, pour simplifier un raisonnement, de remplacer une suite par une suite équivalente plus simple. Le cas le plus simple et le cas d'une somme de termes dont un est plus grand que tous les autres. Par exemple,

$$2n^{-2} + 5 + 6n^3 + 12n^6 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 12n^6.$$

Cette remarque est en fait générale. En effet, deux suites sont équivalentes si et seulement si la différence entre les deux est négligeable devant l'une ou l'autre :

Proposition 10.9. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites ne s'annulant pas. Alors on a

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$$

si et seulement si

$$u_n - v_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n).$$

Démonstration. On suppose que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes. Alors on a

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Inversement, si $(u_n - v_n)$ est négligeable devant v_n on a

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{v_n + (u_n - v_n)}{v_n} = 1 + \frac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

D'où le résultat. □

La notion d'équivalence entre les suites est particulièrement simple et il est très tentant de remplacer une suite par une suite plus simple, mais elle a le gros défaut de ne pas bien se comporter vis-à-vis de la somme. Ainsi, même si

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{u}_n \quad \text{et} \quad v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{v}_n,$$

il peut arriver que

$$u_n + v_n \quad \text{n'est pas équivalente à} \quad \tilde{u}_n + \tilde{v}_n.$$

Cela se produit quand les termes principaux se compensent. Considérons par exemple les suites définies par

$$u_n = n^3 + 4n^2, \quad \tilde{u}_n = n^3, \quad v_n = -n^3, \quad \tilde{v}_n = -n^3 + n^2.$$

Au final, même si la notion d'équivalence reste utile, on utilisera quasiment systématiquement la notion de négligeabilité ou de domination dans les calculs.

Remarque 10.10. Les trois définitions de ce paragraphe ont été données pour des suites indexées par $n \in \mathbb{N}$ et ne s'annulant pas. Pourtant dans les exemples, on a considéré des suites qui pouvaient s'annuler voire ne pas être définies par exemple en 0. Comme on ne s'intéresse qu'au comportement asymptotique des suites en question, l'important est que le rapport u_n/v_n soit bien défini à partir d'un certain rang. Ainsi on peut définir les mêmes notions pour les suites indexées indifféremment par \mathbb{N} ou \mathbb{N}^* et qui n'ont au plus qu'un nombre fini de termes nuls (autrement dit, qui ne s'annulent pas au-delà d'un certain rang).

11 Limite supérieure, limite inférieure

Proposition-Définition 11.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit ses limites supérieures et inférieures par

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{p \geq n} u_p.$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{p \geq n} u_p.$$

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \in [a, b]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\{u_p, p \geq n\}$ est majoré (par b), et admet donc une borne supérieure (comprise entre a et b). Pour $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$ on a

$$\{u_p, p \geq m\} \subset \{u_p, p \geq n\},$$

donc

$$\sup_{p \geq n} u_p \geq \sup_{p \geq m} u_p.$$

Ainsi la suite

$$\left(\sup_{p \geq n} u_p \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est décroissante et minorée (par a). Elle admet donc une limite, ce qui assure que la limite supérieure de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. On vérifie de la même façon que la définition de la limite inférieure est licite. \square

Si on autorise les valeurs $+\infty$ et $-\infty$, alors on peut définir de la même façon les limites supérieure et inférieure d'une suite qui n'est pas nécessairement bornée.

Exemple 11.2. — On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sup_{p \geq n} u_p = 1 \quad \text{et} \quad \inf_{p \geq n} u_p = -1,$$

donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = -1.$$

— Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{N}\right).$$

Alors on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = -1.$$

— Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}.$$

Alors on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = -1.$$

Proposition 11.3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

(i) On a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on a

$$u_n \in \left[\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n - \varepsilon, \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n + \varepsilon \right].$$

(iii) On a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$$

si et seulement si la suite u_n converge. Dans ce cas on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

(iv) $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$ est sa plus petite valeur d'adhérence.

Démonstration. • Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$v_n = \sup_{p \geq n} u_p \quad \text{et} \quad w_n = \inf_{n \geq p} u_p.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_n \leq v_n$, donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$v_{N_1} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n + \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $n \geq N_1$ on a

$$u_n \leq v_{N_1} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n + \varepsilon.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_2$ on a

$$u_n \geq w_{N_2} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n - \varepsilon.$$

On obtient la deuxième propriété en posant $N = \max(N_1, N_2)$.

- Si $\liminf u_n = \limsup u_n$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette valeur commune d'après (ii). Inversement on suppose que u_n converge vers une limite ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ pour tout $n \geq N$. Pour $n \geq N$ on a alors $v_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, ce qui implique que

$$\left| \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a alors

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell.$$

De même on obtient que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell.$$

- Soit $\sigma > \limsup u_n$. On note $\varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma - \limsup u_n)$. D'après (ii) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq \limsup u_n + \varepsilon \leq \sigma - \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, donc σ ne peut pas être une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrons maintenant que $\limsup u_n$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On construit par récurrence une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)}$ converge vers $\limsup u_n$. On pose $\varphi(0) = 0$. On considère $n \in \mathbb{N}$ et on suppose avoir construit $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$. Il existe $N > \varphi(n)$ tel que $|v_n - \limsup u_n| \leq 2^{-(n+1)}$. Par définition de v_N il existe $p \geq N$ tel que $v_N - 2^{-(n+1)} \leq u_p \leq v_N$. On pose alors $\varphi(n+1) = p$, de sorte que

$$|u_{\varphi(n+1)} - \limsup u_n| \leq 2^{-n}.$$

Ainsi la suite $u_{\varphi(n)}$ converge vers $\limsup u_n$. □

12 Suites définies par une relation de récurrence

On a déjà discuté à la proposition 1.4 les suites récurrentes linéaires d'ordre 1. Dans cette section on donne des exemples plus avancés : les suites récurrentes linéaire d'ordre 2 et des exemples de suites récurrentes générales d'ordre 1.

12.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 12.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On note $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ les racines (éventuellement confondues) du polynôme $X^2 - aX - b$.

(i) On suppose que les deux racines λ_1 et λ_2 sont réelles et distinctes. Alors il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n.$$

(ii) On suppose que les racines λ_1 et λ_2 ne sont pas réelles. On a alors $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. On considère $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 = re^{i\theta}$. Alors il existe $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\beta_1 \cos(n\theta) + \beta_2 \sin(n\theta))r^n.$$

(iii) On suppose que $\lambda_1 = \lambda_2$ (on note λ cette valeur commune). Alors il existe $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\gamma_1 n + \gamma_0)\lambda^n.$$

12.2 Autres exemples de suites récurrentes d'ordre 1

Soient I un intervalle fermé non trivial de \mathbb{R} et f une fonction continue de I dans I . Étant donné $u_0 \in I$ on définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Proposition 12.2. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in I$. Alors ℓ est un point fixe de f (cela signifie que $f(\ell) = \ell$).

Démonstration. Comme l'intervalle I est fermé, on obtient par compacité de la limite avec la relation d'ordre que $\ell \in I$. Par continuité de f , on obtient par passage à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$ que $\ell = f(\ell)$. \square

Proposition 12.3. On suppose que la fonction f est croissante sur I . Alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone (on peut obtenir le sens de monotonie en regardant le signe de $u_1 - u_0$).

Démonstration. Supposons par exemple que $u_0 \leq u_1$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n \leq u_{n+1}$. On a supposé le cas $n = 0$. On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$. Comme f est croissante et $u_{n-1} \leq u_n$ on a alors

$$u_n = f(u_{n-1}) \leq f(u_n) = u_{n+1}.$$

Ainsi on obtient par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On montre de même que si $u_0 \geq u_1$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. \square

Exemple 12.4. On se donne $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Comme \mathbb{R}_+ est stable par la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$, cette suite est bien définie. En outre f est croissante sur \mathbb{R}_+ et on peut vérifier que son unique point fixe est

$$x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Puisque f est croissante, $[0, x_0]$ et $[x_0, +\infty[$ sont stables par f . En outre, $f(x) - x$ est positif si $x \leq x_0$ et négatif si $x \geq x_0$.

On suppose que $u_0 \leq x_0$. Alors $x_1 = f(x_0) \geq x_0$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par x_0 . Elle est donc convergente, et sa limite est nécessairement un point fixe de f . Ainsi u_n tend vers x_0 . De même, si $u_0 \geq x_0$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers x_0 .

Proposition 12.5. *On suppose que la fonction f est décroissante sur I . Alors $g = f \circ f$ est croissante. Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones, de monotonie contraire.*

Démonstration. Comme I est stable par f , il l'est également par g . En outre, comme f est décroissante, g est croissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$. Comme g est croissante, on obtient que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones. Supposons par exemple que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En particulier $u_2 = v_1 \geq v_0 = u_0$. Comme f est décroissante, on déduit que

$$u_3 = f(u_2) \geq f(u_0) = u_1.$$

Cela implique que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De même, si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. \square

Exemple 12.6. On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \frac{2}{\sqrt{3+x}} \end{cases}$$

\mathbb{R}_+ est fermé et stable par f , et f est décroissante. On vérifie que l'unique point fixe de f sur \mathbb{R}_+ est $x_0 = 1$. En outre on a

$$f([1, +\infty[) =]0, 1] \subset [0, 1] \quad \text{et} \quad f([0, 1]) = \left[1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right] \subset [1, +\infty[.$$

On considère

$$g = f \circ f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3 + \frac{2}{\sqrt{3+x}}}}.$$

On vérifie que $x_0 = 1$ est également l'unique point fixe de g sur \mathbb{R}_+ .

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier on a $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $u_2 \simeq 1,04 < u_0$. Ainsi la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $[1, +\infty[$ est stable par g , la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. Elle converge donc vers une limite ℓ , qui est nécessairement un point fixe de g , donc $\ell = 1$. De même, la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et tend vers 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.

13 Suites complexes

Dans tout ce chapitre on n'a considéré que des suites à valeurs réelles. Quasiment tout s'adapte au cas de suites à valeurs complexes. La définition de la limite s'adapte en remplaçant la valeur absolue par un module dans (2.1). Ensuite toutes les propriétés peuvent se redémontrer de la même façon. Une autre possibilité est d'utiliser directement les résultats vus pour les suites réelles avec l'observation suivante :

Proposition 13.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$$

si et seulement si

$$\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Im}(\ell). \quad (13.1)$$

Dans la démonstration qui suit on fera attention à bien distinguer les valeurs absolues de réels et les modules des complexes.

Démonstration. On suppose que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq N$ on a alors

$$|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| = |\operatorname{Re}(u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

et, de même,

$$|\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)| = |\operatorname{Im}(u_n - \ell)| \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Cela prouve (13.1). Inversement, supposons que (13.1) est vraie. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on a

$$|\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(\ell)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on a

$$|\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(\ell)| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Pour tout $n \geq N$ on a alors

$$|u_n - \ell| = \sqrt{\operatorname{Re}(u_n - \ell)^2 + \operatorname{Im}(u_n - \ell)^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

Cela prouve que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$. □

On prendra tout de même garde aux quelques différences entre suites réelles et suites complexes. Il n'y a pas de relation d'ordre totale usuelle dans \mathbb{C} . Ainsi, tous ce qui en dépend d'une façon ou d'une autre ne peut pas être adapté.

Par exemple on ne définit pas de suite qui tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Par contre, rien n'interdit de dire que

$$|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

pour signifier que pour n grand u_n est loin de l'origine. En effet, $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est rien d'autre qu'une suite réelle.

Autre conséquence, il n'y a pas de notion de monotonie pour les suites complexes. Ainsi, rien de ce qui a été dit au paragraphe 7 n'a de sens pour les suites complexes. Les résultats du paragraphe 6 ainsi que la proposition 3.4 sont également à oublier dans ce contexte.

14 Exercices

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas. On suppose qu'il existe $\ell \in [0, 1[$ tel que

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

1. Montrer qu'il existe $\sigma \in [0, 1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $|u_{n+1}| \leq \sigma |u_n|$ pour tout $n \geq N$.
2. En déduire que u_n tend vers 0.

Exercice 2 (Moyenne au sens de Cesàro). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell,$$

alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

2. À l'aide d'un contre exemple, montrer que la réciproque n'est pas vraie.
3. Montrer que les résultats précédents sont encore valables en remplaçant ℓ par $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

Montrer que

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante qui admet une sous-suite convergente. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer qu'elle est convergente si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On note

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall p > n, u_p < u_n\}.$$

1. On suppose que E est infini. Construire une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est décroissante.
2. On suppose que E est fini. On note $N = \max(E)$.
 - a. Montrer que pour tout $n > N$ il existe $p > n$ tel que $u_p \geq u_n$.
 - b. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une suite extraite croissante.
3. Montrer que toute suite admet une suite extraite monotone.
4. Donner une nouvelle preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que u_n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

En déduire que pour tout entier n , on a

$$\ln(n+1) \leq u_n \leq \ln(n) + 1.$$

5. Montrer que $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} \ln(n)$.
6. Montrer que la suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = u_n - \ln(n)$. Montrer que la suite v est positive et décroissante.
7. En déduire qu'il existe $\gamma \in [0, 1]$ tel que $u_n = \ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow \infty}(1)$. Le réel γ est appelé constante d'Euler.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
2. Que peut-on dire si $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^n |u_k| \leq M.$$

Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui ne s'annule pas. On suppose que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1.$$

Montrer que u_n tend vers 0.

Exercice 12. Dans cet exercice on s'intéresse aux limites supérieures et inférieures pour des suites qui ne sont pas nécessairement bornées. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On rappelle qu'on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$v_n = \sup_{p \geq n} u_p \quad \text{et} \quad w_n = \inf_{p \geq n} u_p.$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite w_n est croissante (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

On pose (dans $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n.$$

- 2.** Montrer que $\limsup u_n = +\infty$ si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Montrer que $\liminf u_n = -\infty$ si et seulement si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée.
- 3.** Montrer que $\liminf u_n = +\infty$ si et seulement si u_n tend vers $+\infty$. Montrer que $\limsup u_n = -\infty$ si et seulement si u_n tend vers $-\infty$.

Exercice 13. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2}.$$

Exercice 14. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2.$$

Exercice 15. Soit $a > 0$. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

Exercice 16. On considère la suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}.$$

Montrer que $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{n \rightarrow \infty}(1)$.

Exercice 17.

Soient a et b deux réels non nuls. L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant, pour tout entier n ,

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

On pose $p(x) = x^2 - ax - b$, et on note λ_1, λ_2 les deux racines (éventuellement complexes) de p . On a alors $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$.

1. Que vaut $\lambda_1 + \lambda_2$? $\lambda_1 \lambda_2$? En déduire que λ_1 et λ_2 ne sont pas nuls.

On définit la suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - \lambda_1 u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrez que $v_{n+1} - \lambda_2 v_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. En déduire v_n en fonction de v_0 .

3. Montrez que la suite $w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \frac{u_n}{\lambda_2^n}$ satisfait

$$w_{n+1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} w_n + \frac{v_0}{\lambda_2}.$$

• Cas 1 : $\lambda_1 = \lambda_2$ (p admet une racine réelle double)

4. Déterminez w_n en fonction de v_0 et u_0 . En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que

$$u_n = (\alpha n + \beta) \lambda_1^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Cas 2 : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ (p admet deux racines réelles distinctes).
5. Déterminez w_n en fonction de u_0 et v_0 . En déduire u_n en fonction de u_0 et v_0 .
 6. En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que

$$u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Cas 3 : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ (p admet deux racines complexes distinctes).
7. Montrez que $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$. On pose $\lambda_2 = re^{i\theta}$ avec $r \neq 0$.
 8. Montrez que la formule donnant u_n déterminée question 5 est toujours valable.
 9. En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que

$$u_n = \left(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta) \right) r^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 18 (Racines). Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$p_n(x) = x(x-1)\dots(x-(n+1)) = \prod_{k=0}^{n+1} (x-k).$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in]0, 1[$ tel que $p'_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. *Indication : on pourra montrer que pour tout n , $p'_{n+1}(x) = p_n(x) + (x - (n+2))p'_n(x)$.*
3. Montrer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. *Indication : on pourra montrer que pour tout n , pour tout $x \notin \{0, \dots, n+1\}$,*

$$\frac{p'_n(x)}{p_n(x)} = \frac{1}{x} + \dots + \frac{1}{x - (n+1)}.$$

4. (*) Montrer que $x_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)}$.