Chapitre 3

Formule de Green

Le but de ce chapitre est de démontrer la formule de Stokes, qui généralise en dimension $d \geqslant 2$ le théorème fondamental de l'analyse reliant en dimension 1 les notions d'intégrales et de primitives. Notre principale motivation ici est la formule de Green qui généralise elle la formule d'intégration par parties.

Comme souvent, pour faire des calculs d'intégrales en dimension supérieure, on applique le théorème de Fubini pour se ramener à des intégrales en dimension 1. Par exemple, si on se donne sur $\mathbb{R}^2$ deux fonctions u et v de classe C^1, dont l'une au moins est à support compact, il n'est pas difficile de voir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_{x_1} u)\, v\, dx = -\int_{\mathbb{R}^2} u\, (\partial_{x_1} v)\, dx.$$

En effet, pour $x_2 \in \mathbb{R}$ fixé, on a par intégration par parties sur $\mathbb{R}$ (il n'y a pas de termes de bord car la fonction $(uv)(\cdot, x_2)$ est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}$)

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_{x_1} u(x_1, x_2) v(x_1, x_2)\, dx_1 = -\int_{\mathbb{R}} u(x_1, x_2) \partial_{x_1} v(x_1, x_2)\, dx_1.$$

Il reste à intégrer cette égalité par rapport à x_2 pour conclure. Et le raisonnement vaut en fait en dimension d quelconque et pour n'importe laquelle des dérivées partielles.

Considérons maintenant un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Le raisonnement précédent vaut encore pour des fonctions u et v de classe C^1 dont une au moins est à support compact dans Ω. Puisque u ou v s'annule près de la frontière de Ω, il n'y a toujours pas de termes de bord dans les intégrations par parties. Finalement, on obtient assez facilement le résultat suivant.

Proposition 3.1. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et u, v des fonctions de classe C^1 sur Ω dont une au moins est à support compact. Alors pour $j \in [\![1, d]\!]$ on a*

$$\int_{\Omega} (\partial_{x_j} u)\, v\, dx = -\int_{\Omega} u\, (\partial_{x_j} v)\, dx.$$

Les ennuis commencent lorsqu'on considère des fonctions u et v qui ne sont pas nulles près de la frontière de Ω. Et encore, si on a un paramétrage simple de l'ouvert Ω, on peut refaire le même raisonnement que précédemment, avec des termes de bord. Par exemple, si Ω est le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $y \in]-1,1[$ on calcule

$$\int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \partial_x u(x,y)v(x,y)\,dx$$
$$= (uv)\big(\sqrt{1-y^2},y\big) - (uv)\big(-\sqrt{1-y^2},y\big) - \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} u(x,y)\partial_x v(x,y)\,dx.$$

En intégrant par rapport à $y \in]-1,1[$ on obtient

$$\iint_\Omega \partial_x u(x,y)v(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_{y=-1}^{1} \Big((uv)\big(\sqrt{1-y^2},y\big) - (uv)\big(-\sqrt{1-y^2},y\big)\Big)\,dy - \iint_\Omega u(x,y)\partial_x v(x,y)\,dx\,dy.$$

Le but de ce chapitre est de comprendre le premier terme du membre de droite. Sans surprise, on observe qu'il fait intervenir les valeurs de u et v sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, soit le bord de Ω. Ainsi il s'agit d'une intégrale sur un cercle.

Plus généralement, une formule d'intégration par parties sur un ouvert Ω fera nécessairement intervenir une intégrale sur le bord $\partial\Omega$ de Ω. On se placera dans le cas favorable où $\partial\Omega$ est une sous-variété suffisament régulière de $\mathbb{R}^d$. Comme sur n'importe quel ensemble, on peut munir une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ d'une structure d'espace mesuré et construire l'intégrale correspondante. Dans la première partie de ce chapitre on étendra à ce contexte l'intégrale de Lebesgue. Le cahier des charges est le même que dans l'espace euclidien. Sur une courbe, on veut que la mesure de Lebesgue étende la notion de longueur, pour une sous-variété de dimension 2 la mesure de Lebesgue doit étendre la notion de surface, etc.

Une fois ce travail effectué, on pourra reprendre la formule d'intégration par parties et voir le terme de bord comme une intégrale sur $\partial\Omega$ muni de sa mesure de Lebesgue.

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ on note $C^\infty(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à l'ouvert Ω des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. Dans tout ce chapitre on note $e = (e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

3.1 Mesure de Lebesgue sur une sous-variété de $\mathbb{R}^d$

3.1.1 Hypersurfaces de $\mathbb{R}^d$

Définition 3.2. Soient S une partie de $\mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que S est une hypersurface de classe C^k si pour tout $w \in S$ il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de w dans $\mathbb{R}^d$ et une application $F : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que $\nabla F(w) \neq 0$ et $S \cap \mathcal{V} = F^{-1}(\{0\})$.

Exemples 3.3.
- Soit $\nu \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Alors l'hyperplan $H = \mathsf{Vect}(\nu)^\perp$ est une hypersurface de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^d$. Pour F on peut considérer la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^d$ associe $x \cdot \nu$ (elle convient globalement, au voisinage de tout $w \in H$ on peut vérifier la définition avec $\mathcal{V} = \mathbb{R}^d$).
- On considère la sphère

$$S^{d-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, x_1^2 + \dots + x_d^2 = 1 \right\}.$$

Alors S^{d-1} est une hypersurface de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^d$ (considérer la fonction $F : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_d^2 - 1$). Pour tout $r > 0$ on peut considérer de même la sphère de rayon r :

$$S_r^{d-1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, x_1^2 + \cdots + x_d^2 = r^2 \right\}.$$

— Soient $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ et φ une fonction de classe C^k ($k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) de $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$. Le graphe de φ est alors

$$\Gamma = \left\{ (x', \varphi(x')) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}, x' \in \mathcal{O} \right\}.$$

C'est une hypersurface de classe C^k dans $\mathbb{R}^d$. Pour le voir on considère la fonction

$$F : \begin{cases} \mathcal{O} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ (x', x_d) & \mapsto & x_d - \varphi(x'). \end{cases}$$

Le cas du graphe sera particulièrement confortable pour les calculs à venir. Le théorème des fonctions implicites assure que, localement au voisinage de chacun de ses points, toute hypersurface peut en fait être vue comme un graphe (quitte à changer la base de $\mathbb{R}^d$ avec laquelle on travaille).

Définition 3.4. Soient Γ une partie de $\mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que Γ est un graphe de classe C^k s'il existe une base orthonormée $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$ de $\mathbb{R}^d$, un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^{d-1}$ et une application $\varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ de classe C^k tels que Γ est le graphe de la fonction φ dans $\mathbb{R}^d$ muni de la base β. Cela signifie que S est l'image de $\mathcal{O}$ par

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{O} & \to & \mathbb{R}^d, \\ (x_1, \ldots, x_{d-1}) & \mapsto & x_1\beta_1 + \cdots + x_{d-1}\beta_{d-1} + \varphi(x_1, \ldots, x_{d-1})\beta_d. \end{cases}$$

On dit alors que Φ est un paramétrage de Γ.

Proposition 3.5. *Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Un graphe de classe C^k dans $\mathbb{R}^d$ est une hypersurface de classe C^k.*

Démonstration. On reprend les notations de la definition 3.4. On note

$$\mathcal{V} = \left\{ \sum_{j=1}^d x_j\beta_j, (x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \mathcal{O}, x_d \in \mathbb{R} \right\},$$

et pour $x \in \mathcal{V}$ et $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum x_j\beta_j \in \mathcal{V}$ (écriture unique) on pose

$$F(x) = x_d - \varphi(x_1, \ldots, x_{d-1}).$$

Alors F vérifie toutes les conditions de la définition 3.2. □

Proposition 3.6. *Soient S une hypersurface de $\mathbb{R}^d$ et $w \in S$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de w dans $\mathbb{R}^d$ tel que $S \cap \mathcal{V}$ est un graphe.*

Démonstration. Soient $\mathcal{V}$ un voisinage de w et $F : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ tels que donnés par la définition 3.2. Il existe $j \in [\![1, d]\!]$ tel que $\partial_{x_j} F(w) \neq 0$. On construit une base orthonormée $(\beta_1, \ldots, \beta_d)$ de $\mathbb{R}^d$ en réordonnant les vecteurs de la base canonique $(e_1, \ldots, e_d)$, de sorte que $\beta_d = e_j$. On note alors $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées d'un point $y \in \mathbb{R}^d$ dans cette base. Ainsi on a $\partial_{y_d} F(w) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites on obtient que, quitte à réduire $\mathcal{V}$, $S \cap \mathcal{V}$ est bien un graphe de classe C^k dans $\mathbb{R}^d$ munit de la base β. □

Exemples 3.7. — On considère la sphère S^2 de $\mathbb{R}^3$. S^2 n'est pas un graphe, mais chaque demi-sphère est bien un graphe. Par exemple, la demi-sphère

$$S^2 \cap \{x = (x_1, x_2, x_3) \,|\, x_3 > 0\} \tag{3.1}$$

est le graphe de l'application

$$\varphi_+ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

où on a noté $\mathbb{D} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$. Un graphe n'est pas nécessairement le graphe d'une fonction exprimant la dernière coordonnée en fonction des autres. Quitte à réordonner les vecteurs de la base canonique, on peut aussi voir l'ensemble

$$S_1^- = \left\{x \in S^2 \,|\, x_1 < 0\right\}$$

comme un graphe. On a

$$S_1^- = \{\varphi_-(x_2, x_3)e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, (x_2, x_3) \in \mathbb{D}\},$$

où

$$\varphi_-(x_2, x_3) = -(1 - x_2^2 - x_3^2).$$

Pour se conformer au cadre de la définition 3.4, il suffit de changer de base. En effet, si on considère la base $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (e_2, e_3, e_1)$ alors on a aussi

$$S_1^- = \{y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \varphi_-(y_1, y_2)\beta_3, (y_1, y_2) \in \mathbb{D}\}.$$

Proposition-Définition 3.8 (Plan tangent et vecteur normal)**.** Soit Γ un graphe de classe C^1. Soient β, $\mathcal{O}$, φ et Φ comme à la définition 3.4. Soient $w \in \Gamma$ et $x' \in \mathcal{O}$ tel que $w = \Phi(x')$.

(i) Le plan tangent $T_w\Gamma$ à Γ au point w est l'image de la différentielle $d_x\Phi$. C'est un hyperplan de $\mathbb{R}^d$.

(ii) On appelle vecteur normal à Γ en w un vecteur $\nu \in \mathbb{R}^d$ orthogonal à $T_w\Gamma$. On dit de plus que ν est unitaire si $\|\nu\| = 1$.

Démonstration. Montrons que la définition de $T_w\Gamma$ ne dépend pas du choix de $(\beta, \mathcal{O}, \varphi)$. On suppose que $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$, que $\tilde{\mathcal{O}}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ et que $\psi \in C^1(\tilde{\mathcal{O}}, \mathbb{R})$ est telle que Γ est également le graphe de ψ dans la base γ, c'est-à-dire l'image de $\Psi : \tilde{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}^d$, où pour $y' = (y_1, \dots, y_{d-1}) \in \tilde{\mathcal{O}}$ on a posé

$$\Psi(y') = \sum_{j=1}^{d-1} y_j\gamma_j + \psi(y')\gamma_d.$$

Cette application Ψ est de classe C^1 sur $\mathcal{O}'$ et réalise une bijection de $\mathcal{O}'$ dans Γ. Si on note Π la projection orthogonale de $\mathbb{R}^d$ sur l'hyperplan engendré par $(\gamma_1, \dots, \gamma_{d-1})$ (il s'agit d'une fonction de classe C^∞), alors la réciproque de Φ est la restriction à Γ de Π. On note $\Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$. Cela définit une bijection de $\mathcal{O}$ dans $\tilde{\mathcal{O}}$. Comme on a aussi $\Theta = \Pi \circ \Phi$, Θ est de classe C^1 sur $\mathcal{O}$. Soient $x' \in \mathcal{O}$, $w = \Phi(x')$ et $y' = \Theta(x') = \Psi^{-1}(w) \in \tilde{\mathcal{O}}$. On a

$$\mathrm{Im}(d_{x'}\Phi) = \mathrm{Im}\left(d_{x'}(\Psi \circ \Theta)\right) = \mathrm{Im}\left(d_{y'}\Psi \circ d_{x'}\Theta\right) \subset \mathrm{Im}(d_{y'}\Psi).$$

De même on a $\mathrm{Im}(d_{y'}\Psi) \subset \mathrm{Im}(d_{x'}\Phi)$. D'où $\mathrm{Im}(d_{x'}\Phi) = \mathrm{Im}(d_{y'}\Psi)$, ce qui assure que la définition de $T_w\Gamma$ ne dépend pas du choix d'un paramétrage. En outre, le sous-espace $\mathrm{Im}(d_{x'}\Phi)$ est engendré par les vecteurs

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x') = \beta_j + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x')\beta_d, \quad 1 \leqslant j \leqslant d-1,$$

qui sont linéairement indépendants, donc $T_w\Gamma$ est de dimension $d-1$. $\square$

Remarque 3.9. Les deux vecteurs normaux unitaires à Γ en w sont donnés par

$$\nu(w) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2}} \left(\sum_{j=1}^{d-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x')\beta_j - \beta_d \right) \tag{3.3}$$

et son opposé $-\nu(w)$.

Remarque 3.10. Montrons qu'avec les notations de la démonstration précédente, on a

$$\det(d_{x'}\Theta) = \det\big(\partial_{x_1}\Phi(x'), \ldots, \partial_{x_{d-1}}\Phi(x'), \gamma_d\big). \tag{3.4}$$

Pour $j \in [\![1, d]\!]$ il existe $a_{j,1}, \ldots, a_{j,d} \in \mathbb{R}$ tels que $\beta_j = \sum_{k=1}^{d} a_{j,k}\gamma_k$. On a alors

$$\partial_{x_j}\Phi(x') = \beta_j + \partial_{x_j}\varphi(x')\beta_d = \sum_{k=1}^{d} \big(a_{j,k} + \partial_{x_j}\varphi(x')a_{d,k}\big)\,\gamma_k,$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\det{}_\gamma\big(\partial_{x_1}\Phi(x'), \ldots, \partial_{x_{d-1}}\Phi(x'), \gamma_d\big) \\
&= \begin{vmatrix} a_{1,1} + a_{d,1}\partial_{x_1}\varphi(x') & \ldots & a_{d-1,1} + a_{d,1}\partial_{x_{d-1}}\varphi(x') & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1,d-1} + \alpha_{d,d-1}\partial_{x_1}\varphi(x') & \ldots & a_{d-1,d-1} + \alpha_{d,d-1}\partial_{x_{d-1}}\varphi(x') & 0 \\ a_{1,d} + a_{d,d}\partial_{x_1}\varphi(x') & \ldots & a_{d-1,d} + a_{d,d}\partial_{x_{d-1}}\varphi(x') & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

D'autre part pour $x' \in \mathcal{O}$ on a

$$\begin{aligned}
\Phi(x') &= \sum_{j=1}^{d-1} x_j\beta_j + \varphi(x')\beta_d \\
&= \sum_{j=1}^{d-1} x_j \sum_{k=1}^{d} a_{j,k}\gamma_k + \varphi(x') \sum_{k=1}^{d} a_{d,k}\gamma_k \\
&= \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d-1} x_j a_{j,k} + \varphi(x')a_{d,k} \right) \gamma_k,
\end{aligned}$$

donc si on note $y' = \Theta(x')$ alors pour $k \in [\![1, d-1]\!]$ on a

$$y_k = \sum_{j=1}^{d-1} x_j a_{j,k} + \varphi(x')a_{d,k}.$$

D'où

$$\det(d_{x'}\Theta) = \begin{vmatrix} a_{1,1} + a_{d,1}\partial_{x_1}\varphi(x') & \ldots & a_{d-1,1} + a_{d,1}\partial_{x_{d-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,d-1} + a_{d,d-1}\partial_{x_1}\varphi(x') & \ldots & a_{d-1,d-1} + a_{d,d-1}\partial_{x_{d-1}} \end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

En développant (3.5) par rapport à la dernière colonne, on obtient que (3.5) et (3.6) coïncident, ce qui prouve (3.4).

3.1.2 Mesure de Lebesgue sur une hypersurface

Dans ce paragraphe on définit la mesure de Lebesgue d'une hypersurface de $\mathbb{R}^d$. Cela généralise la notion de longueur d'une courbe de $\mathbb{R}^2$ et de surface pour une surface de $\mathbb{R}^3$. On pourrait de façon plus générale définir la mesure de Lebesgue sur une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ de n'importe quelle dimension (par exemple, la longueur d'une courbe de $\mathbb{R}^3$).

***Exercice* 1.** Montrer que la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ d'une hypersurface est toujours nulle.

On commence par définir la tribu borélienne d'une hypersurface. On commence par munir S de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{R}^d$. Cela signifie que les ouverts de S sont les ensembles de la forme $S \cap \mathcal{O}$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert usuel de $\mathbb{R}^d$. On peut alors munir S de la tribu borélienne $\mathcal{B}(S)$ correspondante. On peut alors vérifier (exercice) que

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ S \cap B, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

D'après la proposition suivante on a également

$$\mathcal{B}(S) = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \,|\, B \subset S \right\}.$$

Proposition 3.11. *Soit S une hypersurface de classe C^1 dans $\mathbb{R}^d$. Alors S est un borélien de $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. On note $B = \overline{S} \backslash S$. Si $B = \emptyset$, alors S est fermée dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, c'est donc en particulier un borélien. Si $B \neq \emptyset$ alors pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \left\{ x \in S \,|\, \mathsf{dist}(x, B) \geqslant \frac{1}{n} \right\}.$$

Alors S_n est fermé (et donc borélien) dans $\mathbb{R}^d$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et comme $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S_n$, on obtient que S est également un borélien de $\mathbb{R}^d$. □

On définit maintenant une mesure sur un graphe. Avec la Proposition 3.6, on étendra ensuite cette définition aux hypersurfaces générales.

Proposition-Définition 3.12. Soit Γ un graphe de classe C^1 dans $\mathbb{R}^d$. Soient β, $\mathcal{O}$, φ et Φ comme à la définition 3.4.

(i) Soient B un borélien de Γ et $B' = \Phi^{-1}(B)$. On pose alors

$$\sigma(B) = \int_{B'} \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2}\, dx'.$$

Cela définit sur Γ une mesure σ qui ne dépend pas des choix de β, $\mathcal{O}$, φ et Φ.

(ii) Soit f est une fonction mesurable de $S \cap \mathcal{V}$ dans $[0, +\infty]$. L'intégrale de f par rapport à la mesure σ est donnée par

$$\int_{S \cap \mathcal{V}} f\, d\sigma = \int_{\mathcal{O}} f\big(x'\beta' + \varphi(x')\beta_d\big)\sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2}\, dx', \tag{3.7}$$

où pour $x' = (x_1, \dots, x_{d-1})$ on a noté

$$x'\beta' = x_1\beta_1 + \cdots + x_{d-1}\beta_{d-1}.$$

(iii) Si $f : S \cap \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ est intégrable, alors son intégrale est également définie par (3.7).

Démonstration. On laisse en exercice la démonstration du fait que σ est bien une mesure sur $(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma))$ et on montre qu'elle ne dépend pas des choix de β, $\mathcal{O}$, φ et Φ. On considère γ, $\tilde{\mathcal{O}}$, ψ et Ψ comme dans la démonstration de la Proposition-Définition 3.8. Soit B un borélien de Γ, $B' = \Phi^{-1}(B)$ et $\tilde{B}' = \Psi^{-1}(B)$. D'après la remarque 3.9 appliquée avec ψ on a

$$\int_{\tilde{B}'} \sqrt{1 + \|\nabla\psi(y')\|^2}\, dy' = \int_{\tilde{B}'} \frac{1}{|\nu(\Psi(y')) \cdot \gamma_d|}\, dy'.$$

On effectue le changement de variable $y' = \Theta(x')$, où Θ est comme défini dans la démonstration de la Proposition-Définition 3.8. D'après (3.4), cela donne

$$\int_{\tilde{B}'} \sqrt{1 + \|\nabla\psi(y')\|^2}\, dy' = \int_{B'} \frac{1}{|\nu(\Phi(x')) \cdot \gamma_d|} \left|\det\left(\partial_{x_1}\Phi(x'), \dots, \partial_{x_{d-1}}\Phi(x'), \gamma_d\right)\right| \, dx'.$$

Puisque $\nu(\Phi(x'))$ est orthogonal à l'hyperplan engendré par les vecteurs $\partial_{x_j}\Phi(x')$, $1 \leqslant j \leqslant d-1$, les propriétés du déterminant donnent

$$\begin{aligned}&\left|\det\left(\partial_{x_1}\Phi(x'), \dots, \partial_{x_{d-1}}\Phi(x'), \gamma_d\right)\right| \\ &\qquad = \left|\nu(\Phi(x')) \cdot \gamma_d\right| \left|\det\left(\partial_{x_1}\Phi(x'), \dots, \partial_{x_{d-1}}\Phi(x'), \nu(\Phi(x'))\right)\right|.\end{aligned}$$

On a une égalité analogue en remplaçant γ_d par β_d. En appliquant successivement ces deux égalités on obtient

$$\int_{\tilde{B}'} \sqrt{1 + \|\nabla\psi(y')\|^2}\, dy' = \int_{B'} \frac{1}{|\nu(\Phi(x')) \cdot \beta_d|} \left|\det\left(\partial_{x_1}\Phi(x'), \dots, \partial_{x_{d-1}}\Phi(x'), \beta_d\right)\right| \, dx'.$$

En observant que ce dernier déterminant est en fait égal à 1, et en utilisant encore la remarque 3.9, on obtient finalement

$$\int_{\tilde{B}'} \sqrt{1 + \|\nabla\psi(y')\|^2}\, dy' = \int_{B'} \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2}\, dx'.$$

Cela assure que la définition de $\sigma(B)$ ne dépend pas du choix d'une représentation de Γ. □

Proposition-Définition 3.13. Soient S une hypersurface de classe C^1 dans $\mathbb{R}^d$ et K une partie compacte de S (si S est compacte, on peut prendre $K = S$). Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_N$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $K \subset \bigcup_{n=1}^N \mathcal{V}_n$ et $S \cap \mathcal{V}_n$ est un graphe de classe C^1 pour tout $n \in [\![1, N]\!]$. On considère $\chi_1, \dots, \chi_N \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d, [0,1])$ telles que $\sum_{n=1}^N \chi_n = 1$ sur K et $\operatorname{supp}(\chi_n) \subset \mathcal{V}_n$ pour tout $n \in [\![1, N]\!]$. Soit f une fonction mesurable de K dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives ou telle que

$$\sum_{n=1}^N \int_{K \cap \mathcal{V}_n} \chi_n \, |f| \, d\sigma < +\infty.$$

Alors on pose

$$\int_K f \, d\sigma = \sum_{n=1}^N \int_{K \cap \mathcal{V}_n} \chi_n f \, d\sigma.$$

En prenant pour f l'indicatrice d'une partie borélienne de S incluse dans K, cela définit en particulier une mesure σ sur K.

On peut vérifier que la définition de la mesure σ sur K ne dépend pas du choix des ouverts $\mathcal{V}_n$, $1 \leqslant n \leqslant N$, ou de la partition de l'unité $(\chi_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ associée.

Proposition-Définition 3.14. Soient S une hypersurface de classe C^1 dans $\mathbb{R}^d$. Il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties compactes de S, croissante pour l'inclusion et telle que $S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note σ_n la mesure sur K_n telle que définie par la proposition 3.13. Alors pour $B \in \mathcal{B}(S)$ on pose

$$\sigma(B) = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n(B \cap K_n).$$

Cela définit une mesure σ sur S, appelée mesure de Lebesgue sur S.

On peut vérifier que cette définition est bien licite, ne dépend pas du choix de la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et définit bien une mesure sur $(S, \mathcal{B}(S))$.

Exemple 3.15. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le cercle C_R de centre 0 et de rayon $R > 0$. On cherche la mesure (ici la longueur) du demi-cercle de droite. On peut le définir par

$$C_R^+ = \left\{ \left(\sqrt{R^2 - y^2}, y\right), y \in]-R, R[\right\}.$$

Pour $y \in]-R, R[$ on note $\varphi(y) = \sqrt{R^2 - y^2}$. Alors φ est de classe C^∞ et pour $y \in]-R, R[$ on a

$$\varphi'(y) = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\sigma(C_R^+) &= \int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2}}\, dy = \int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\, dy = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2}}\, dy \\
&= R \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}\, d\eta = R\left[\arcsin(\eta)\right]_{-1}^{1} = \pi R.
\end{aligned}$$

Exemple 3.16. On considère la sphère S_R de rayon $R > 0$ dans $\mathbb{R}^3$. On calcule l'aire de la demi-sphère supérieure définie comme en (3.1). C'est le graphe de la fonction φ_R^+ définie par

$$\varphi_R^+(x_1, x_2) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2},$$

pour tout (x_1, x_2) dans le disque $D(0, R)$ de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x_1, x_2) \in D(0, R)$ on a

$$\left\|\nabla \varphi_R^+(x_1, x_2)\right\|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)},$$

d'où, par passage aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}
\sigma(S_R^+) &= \int_{D(0,R)} \sqrt{1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)}}\, dx_1\, dx_2 = 2\pi \int_0^R \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2 - r^2}}\, r\, dr \\
&= 2\pi \int_0^R r \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - r^2}}\, dr = 2\pi R \left[-\sqrt{R^2 - r^2}\right]_0^R \\
&= 2\pi R^2.
\end{aligned}$$

Exercice 2. Montrer que la mesure de Lebesgue de la sphère de rayon R est $4\pi R^2$.

On pourrait énoncer un théorème de changement de variables général entre sous-variétés. On se contentera ici de donner un exemple. Pour $r > 0$ on note B_r et S_r la boule ouverte et la sphère de centre 0 et de rayon r, et σ_r la mesure de Lebesgue sur σ_r.

Proposition 3.17. *Soient $r > 0$ et f une fonction intégrable sur S_r. Alors la fonction $y \mapsto f(ry)$ est intégrable sur S_1 et*

$$\int_{x\in S_r} f(x)\, d\sigma_r(x) = r^{d-1} \int_{y\in S_1} f(ry)\, d\sigma_1(y).$$

Démonstration. On suppose par exemple que f est nulle en dehors de

$$S_r^+ = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in S_r \,:\, x_d > 0\}\,.$$

On peut traiter de la même manière le cas où f est nulle en dehors de n'importe quelle demi-sphère et en déduire le cas général. L'intérêt de cette hypothèse est que S_r^+ est un graphe. Avec les notations de la Définition 3.4 on peut prendre

$$\mathcal{O}_r = \left\{x' = (x_1, \dots, x_{d-1}) \,:\, |x'| < r\right\}$$

et $\varphi_r : x' \mapsto \sqrt{r^2 - |x'|^2}$. On note alors $\Phi_r : \mathcal{O}_r \to S_r^+$ la paramétrisation correspondante. On définit de même $\mathcal{O}_1$, φ_1 et Φ_1. On a alors $\mathcal{O}_r = r\mathcal{O}_1$ et pour $x' \in \mathcal{O}_r$ on a $\varphi_r(x') = r\varphi_1(x'/r)$ et $\Phi_r(x') = r\Phi_1(x'/r)$. Par le changement de variables $x' = ry'$, $dx' = r^{d-1}dy'$, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{S_r} f(x)\, d\sigma_r(x) &= \int_{\mathcal{O}_r} f(\Phi_r(x'))\sqrt{1 + |\nabla\varphi_r(x')|^2}\, dx' \\
&= \int_{\mathcal{O}_r} f\left(r\Phi\left(\frac{x'}{r}\right)\right)\sqrt{1 + \left|\nabla\varphi_1\left(\frac{x'}{r}\right)\right|^2}\, dx' \\
&= r^{d-1}\int_{\mathcal{O}_1} f\left(r\Phi(y')\right)\sqrt{1 + |\nabla_1\varphi(y')|^2}\, dy' \\
&= r^{d-1}\int_{S_1} f(ry)\, d\sigma_1(y).
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On s'intéresse maintenant à un analogue des coordonnées polaires en dimension quelconque.

Proposition 3.18. *Soient $R > 0$ et f une fonction intégrable sur B_R. Alors la fonction $\omega \mapsto f(r\omega)$ est intégrable sur S_1 pour presque tout $r \in]0, R[$ et*

$$\int_{B_R} f(x)\, dx = \int_{r=0}^{R} r^{d-1}\int_{\omega\in S_1} f(r\omega)\, d\sigma_1(\omega)\, dr = \int_{r=0}^{R}\int_{x\in S_r} f(x)\, d\sigma_r(x).$$

Démonstration. Comme pour la preuve précédente on considère le cas où f s'annule en dehors de

$$B_R^+ = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in B_R \,:\, x_d > 0\}\,.$$

On utilise les notations S_1^+, $\mathcal{O}_1$ et Φ_1 de la preuve précédente. Pour $r \in]0, R[$ et $y' \in \mathcal{O}_1$ on pose $\Psi(r, y') = r\Phi(y')$. La fonction Ψ ainsi définie est une bijection de classe C^1 de $]0, R[\times\mathcal{O}_1$ dans B_R^+, et pour $(r, y') \in]0, R[\times\mathcal{O}_1$ on a

$$\left|\mathrm{Jac}\,\Psi(r, y')\right| = \frac{r^{d-1}}{\sqrt{1 - |y'|^2}} = r^{d-1}\sqrt{1 + \|\nabla\varphi_1(y')\|^2}.$$

Par le théorème de l'inversion globale on en déduit que Ψ est un C^1-difféomorphisme. Par le théorème de changement de variable et le théorème de Fubini on obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{B_R^+} f(x)\,dx &= \iint_{]0,R[\times\mathcal{O}_1} f(\Psi(r,y'))\left|\mathrm{Jac}(r,y')\right|\,d\lambda(r,y')\\ &= \int_{r=0}^{R} r^{d-1}\int_{\mathcal{O}_1} f(r\Phi(y'))\sqrt{1+\|\nabla\varphi_1(y')\|^2}\,dy'\,dr\\ &= \int_{r=0}^{R} r^{d-1}\int_{S_1} f(r\omega)\,d\sigma_1(\omega)\,dr.\end{aligned}$$

Cela donne la première égalité. La deuxième est donnée par la Proposition 3.17. $\square$

3.2 Formule de Stokes - Formule de Green

3.2.1 Ouverts réguliers de $\mathbb{R}^d$

Définition 3.19 (Ouvert de classe C^k)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que Ω est un ouvert de classe C^k si pour tout $w\in\partial\Omega$ il existe une base orthonormée $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_d)$, un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^{d-1}$, $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$ et une application $\varphi:\mathcal{O}\to]a,b[$ de classe C^k tels que

$$\mathcal{V}=\left\{\sum_{j=1}^{d} x_j\beta_j,(x_1,\dots,x_{d-1})\in\mathcal{O},x_d\in]a,b[\right\}$$

est un voisinage de w dans $\mathbb{R}^d$ et

$$\Omega\cap\mathcal{V}=\left\{\sum_{j=1}^{d} x_j\beta_j,(x_1,\dots,x_{d-1})\in\mathcal{O},x_d\in\left]\varphi(x_1,\dots,x_{d-1}),b\right[\right\}.$$

On a alors

$$\partial\Omega\cap\mathcal{V}=\left\{\sum_{j=1}^{d} x_j\beta_j,(x_1,\dots,x_{d-1})\in\mathcal{O},x_d=\varphi(x_1,\dots,x_{d-1})\right\}.$$

En particulier, $\partial\Omega$ est une hypersurface de classe C^k dans $\mathbb{R}^d$. La normale extérieure à Ω est alors le vecteur ν défini sur $\partial\Omega$ par (3.3).

Remarque 3.20. Un ouvert dont la frontière est une hypersurface de classe C^k n'est pas nécessairement un ouvert de classe C^k. On considère par exemple dans $\mathbb{R}^2$ l'ouvert $\Omega=\mathbb{R}^2\backslash H$ où $H=\{(x_1,0),x_1\in\mathbb{R}\}$. Alors on a $\partial\Omega=H$, et H est une hypersurface de classe C^∞, mais Ω n'est pas un ouvert de classe C^∞ car Ω n'est pas d'un seul côté de sa frontière.

3.2.2 Champs de vecteurs - Opérateur divergence

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.21. Soit $k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$. On appelle champ de vecteurs de classe C^k sur Ω une application $X:\Omega\to\mathbb{R}^d$ de classe C^k. On appelle champ de vecteur de classe C^k sur $\overline{\Omega}$ la restriction à $\overline{\Omega}$ d'un champ de vecteur de classe C^k sur $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.22. Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$. On note $X_1,\dots,X_d$ les coordonnées de X dans la base canonique. La divergence de X est alors la fonction

$$\mathrm{div}(X)=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial X_j}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{d}\nabla X_j\cdot e_j.$$

La proposition suivante montre que la divergence d'un champ de vecteurs ne dépend pas du choix d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 3.23. *Soient $X = (X_1, \dots, X_d)$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\overline{\Omega}$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$. On note $Y_1, \dots, Y_d$ les coordonnées de X dans la base β. Alors on a*

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{k=1}^{d} \nabla Y_k \cdot \beta_k.$$

Si on note $y = (y_1, \dots, y_d)$ les coordonnées d'un point dans la base β cela s'écrit encore

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial Y_k}{\partial y_k}.$$

Démonstration. Pour $k \in [\![1, d]\!]$ il existe $\alpha_{1,k}, \dots, \alpha_{d,k} \in \mathbb{R}$ tels que $\beta_k = \sum_{j=1}^{d} \alpha_{j,k} e_j$. On a alors

$$X = \sum_{k=1}^{d} Y_k \beta_k = \sum_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} Y_k \alpha_{j,k} e_j = \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{k=1}^{d} \alpha_{j,k} Y_k \right) e_j,$$

donc pour $j \in [\![1, d]\!]$ on a

$$X_j = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{j,k} Y_k.$$

On a alors

$$\sum_{k=1}^{d} \nabla Y_k \cdot \beta_k = \sum_{k=1}^{d} \nabla Y_k \cdot \left(\sum_{j=1}^{d} \alpha_{j,k} e_j \right) = \sum_{j=1}^{d} \nabla \left(\sum_{k=1}^{d} \alpha_{j,k} Y_k \right) \cdot e_j = \sum_{j=1}^{d} \nabla X_j \cdot e_j.$$

□

3.2.3 Formule de Stokes

On est maintenant en mesure de montrer la formule de Stokes, qui est un analogue en dimenstion $d \geqslant 2$ du théorème fondamental de l'analyse. En effet, si on applique le théorème suivant sur un intervalle $]a, b[$ et au champ de vecteurs $x \mapsto f(x)e_1$, où f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ et e_1 le vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}$ (évidemment, on ne l'énonce pas de cette façon en dimension 1), on obtient [1]

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Théorème 3.24 (Formule de Stokes)**.** *Soit Ω un ouvert de classe C^1 dans $\mathbb{R}^d$. On note ν la normale extérieure à Ω. Soit X un champ de vecteurs de classe C^1 à support compact dans $\overline{\Omega}$. Alors on a*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(X)\, dx = \int_{\partial\Omega} (X \cdot \nu)\, d\sigma,$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$.

1. encore faut-il convenir qu'en dimension 0 la mesure de Lebesgue coïncide avec la mesure de comptage. . .

Démonstration. • Pour tout $w \in \partial\Omega$ on considère un voisinage $\mathcal{V}_w$ de w dans $\mathbb{R}^d$ comme donné par la définition 3.19. Il existe $N \in \mathbb{N}$ et $w_1, \dots, w_N \in \partial\Omega$ tels que

$$\operatorname{supp}(X) \subset \Omega \cup \bigcup_{k=1}^{N} \mathcal{V}_{w_k}.$$

On considère une partition de l'unité $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_N$ associée, avec $\operatorname{supp}(\chi_0) \subset \Omega$ et $\operatorname{supp}(\chi_k) \subset \mathcal{V}_{w_k}$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$. On suppose que

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad \int_\Omega \operatorname{div}(\chi_k X)\, dx = \int_{\partial\Omega} (\chi_k X) \cdot \nu \, d\sigma. \tag{3.8}$$

On a alors

$$\int_\Omega \operatorname{div}(X)\, dx = \sum_{k=0}^{N} \int_\Omega \chi_k \operatorname{div}(X)\, dx = \sum_{k=0}^{N} \int_\Omega \operatorname{div}(\chi_k X)\, dx - \sum_{k=0}^{N} \int_\Omega \nabla \chi_k \cdot X \, dx.$$

On a d'une part

$$\sum_{k=0}^{N} \int_\Omega \nabla \chi_k \cdot X\, dx = \int_\Omega \nabla \left(\sum_{k=0}^{N} \chi_k \right) \cdot X \, dx = 0,$$

et d'autre part, d'après (3.8),

$$\sum_{k=0}^{N} \int_\Omega \operatorname{div}(\chi_k X)\, dx = \sum_{k=0}^{N} \int_{\partial\Omega} (\chi_k X) \cdot \nu \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu \, d\sigma.$$

D'où le résultat. Il reste donc à prouver (3.8). Pour $k = 0$, il suffit d'appliquer la formule d'intégration par parties pour deux fonctions dont l'une est à support compact dans Ω (Proposition 3.1).

• Soit $w \in \partial\Omega$. Avec les notations de la définition 3.19, on suppose que X est à support dans $\overline{\Omega} \cap \mathcal{V}$. On note $X_1, \dots, X_d : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ les coordonnées de X dans la base β. En utilisant le changement de variable $(y', y_d) \in \mathcal{O} \times]a, b[\to y'\beta' + y_d \beta_d$ (dont le déterminant vaut 1) on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V} \cap \Omega} \nabla X_d \cdot \beta_d \, dx &= \int_{y' \in \mathcal{O}} \int_{y_d = \varphi(y')}^{b} \frac{\partial}{\partial y_d} X_d(y'\beta' + y_d \beta_d)\, dy_d\, dy' \\
&= - \int_{\mathcal{O}} X_d(y'\beta' + \varphi(y')\beta_d)\, dy'.
\end{aligned}$$

Soit maintenant $j \in [\![1, d-1]\!]$. On étend X par 0 sur $\mathbb{R}^d$. Pour $y' \in \mathcal{O}$ et $t \in]0, b[$ on pose alors

$$h(y', t) = X_j\big(y'\beta' + (t + \varphi(y'))\beta_d\big).$$

Cela définit une fonction $h \in C^1\big(\overline{\mathcal{O} \times]0, b[}\big)$. Pour $y' \in \mathcal{O}$ et $t \in]0, b[$ on a

$$\partial_{y_j} h(y', t) = \nabla X_j\big(y'\beta' + (t + \varphi(y'))\beta_d\big) \cdot \beta_j + \partial_{y_j}\varphi(y') \nabla X_j\big(y'\beta' + (t + \varphi(y'))\beta_d\big) \cdot \beta_d.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{V} \cap \Omega} \nabla X_j \cdot \beta_j \, dx = \int_{\mathcal{O}} \int_0^b \nabla X_j\big(y'\beta' + (t + \varphi(y'))\beta_d\big) \cdot \beta_j \, dt\, dy' \\
&\quad = \int_{\mathcal{O}} \int_0^b \partial_{y_j} h(y', t)\, dt\, dy' - \int_{\mathcal{O}} \int_0^b \partial_{y_j} \varphi(x') \nabla X_j\big(y'\beta' + (t + \varphi(y'))\beta_d\big) \cdot \beta_d \, dt\, dx' \\
&\quad = \int_0^b \int_{\mathcal{O}} \partial_{x_j} h(x', t)\, dx'\, dt - \int_{\mathcal{O}} \partial_{x_j}\varphi(x') \left(\int_0^b \frac{d}{dt} X_j\big(y'\beta' + (t + \varphi(y'))\beta_d\big)\, dt \right) dx' \\
&\quad = \int_{\mathcal{O}} X_j\big(y'\beta' + \varphi(y')\beta_d\big) \partial_{x_j}\varphi(x')\, dx'.
\end{aligned}$$

En sommant pour $j \in [\![1, d]\!]$ on obtient

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(X)\, dx = \int_{\mathcal{O}} (X \cdot \nu)\big(y'\beta' + (t + \varphi(y'))\beta_d\big)\sqrt{1 + \|\nabla\varphi(x')\|^2}\, dx' = \int_{\partial\Omega} X \cdot \nu\, d\sigma.$$

Cela prouve (3.8) et conclut la démonstration. □

3.2.4 Formule de Green

On déduit maintenant de la formule de Stokes la formule de Green, qui est un analogue en dimension $d \geqslant 2$ de la formule d'intégration par parties. Dans le théorème suivant on suppose qu'un des facteurs est à support compact dans $\overline{\Omega}$ pour s'assurer que les intégrales sont bien définies même dans le cas où Ω n'est pas borné, mais cela n'empêche pas les deux fonctions d'être non nulles au voisinage de $\partial\Omega$.

Théorème 3.25. *Soient Ω un ouvert de classe C^1 et $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ dont une au moins est à support compact dans $\overline{\Omega}$. Pour $j \in [\![1, d]\!]$ on a alors*

$$\int_{\Omega} \partial_j u\, v\, dx = -\int_{\Omega} u\, \partial_j v\, dx + \int_{\partial\Omega} uv\, \nu_j\, d\sigma,$$

où $\nu_j = \nu \cdot e_j$ est la j-ième coordonnée de ν dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. Pour $x \in \overline{\Omega}$ on pose $X(x) = u(x)v(x)e_j$. Pour tout $x \in \Omega$ on a alors

$$\operatorname{div}(X)(x) = \partial_j(uv)(x) = \partial_j u(x)v(x) + u(x)\partial_j v(x).$$

En outre, pour $x \in \partial\Omega$ on a $X(x) \cdot \nu(x) = u(x)v(x)\nu_j(x)$. On conclut alors avec le théorème de Stokes. □

Pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$ et $x \in \partial\Omega$ on pose

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x).$$

Théorème 3.26. *Soient Ω un ouvert de classe C^1 et $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ dont une au moins est à support compact dans $\overline{\Omega}$. Alors on a*

$$-\int_{\Omega} \Delta u\, v\, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\, d\sigma,$$

où on a noté $\partial_\nu u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ la dérivée normale de u.

Démonstration. D'après le théorème 3.25 on a, pour tout $j \in [\![1, d]\!]$,

$$-\int_{\Omega} \partial_j^2 u\, v\, dx = \int_{\Omega} \partial_j u\, \partial_j v\, dx - \int_{\partial\Omega} \partial_j u\, v\, \nu_j\, d\sigma.$$

On conclut en sommant sur $j \in [\![1, d]\!]$. □

Corollaire 3.27. *Soient Ω un ouvert de classe C^1 et $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ dont une au moins est à support compact dans $\overline{\Omega}$. Alors on a*

$$\int_{\Omega} (u\, \Delta v - \Delta u\, v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\right) d\sigma.$$

Exemple 3.28. Soient $u, v \in C^1(\overline{B_1})$. Alors on a

$$\int_{B_1} \nabla u(x) v(x)\, dx = \int_{x \in S_1} u(x)v(x)x\, d\sigma(x) - \int_{B_1} u(x)\nabla u(x)\, dx.$$

Si $u \in C^2(\overline{B_1})$ on a aussi

$$\int_{B_1} \Delta u(x) v(x)\, dx = \int_{x \in S_1} \partial_r u(x) v(x)\, d\sigma(x) - \int_{B_1} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx,$$

où $\partial_r u(x) = \nabla u(x) \cdot \frac{x}{|x|}$ est la dérivée radiale de u.

Exemple 3.29. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $j \in [\![1, d]\!]$ on a

$$-\int_{\mathbb{R}^d} |x|\, \partial_j \phi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x_j}{|x|} \phi(x)\, dx. \tag{3.9}$$

La fonction $x \mapsto |x|$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ est sa dérivée par rapport à x_j est $\frac{x_j}{|x|}$. Cependant, (3.9) n'est pas une conséquence directe de la formule de Green à cause du manque de régularité en 0. D'après le théorème de convergence dominée on a

$$-\int_{\mathbb{R}^d} |x|\, \partial_j \phi(x)\, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} |x|\, \partial_j \phi(x)\, dx.$$

Pour $\varepsilon > 0$ on a par la formule de Green

$$-\int_{|x|>\varepsilon} |x|\, \partial_j \phi(x)\, dx = -\int_{x \in S_\varepsilon} |x|\, \phi(x) \nu_j(x)\, d\sigma(x) + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x_j}{|x|} \phi(x)\, dx,$$

où $\nu(x) = -\frac{x}{\varepsilon}$ est la normale extérieure à $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_\varepsilon}$. On a alors

$$\left| \int_{x \in S_\varepsilon} |x|\, \phi(x) \nu_j(x)\, d\sigma_\varepsilon(x) \right| \leqslant \varepsilon \sigma_\varepsilon(S_\varepsilon) \|\phi\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

D'autre part, par le théorème de convergence dominée on a

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x_j}{|x|} \phi(x)\, dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x_j}{|x|} \phi(x)\, dx.$$

Cela prouve (3.9).

Le calcul qui suit sera utile pour étudier au chapitre suivant l'équation de Poisson $-\Delta u = f$ en dimension $d \geqslant 3$.

Exemple 3.30. On suppose que $d \geqslant 3$. Montrons que pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a

$$-\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{-(d-2)}\, \Delta \phi(x)\, dx = (d-2)\sigma(S_1)\phi(0). \tag{3.10}$$

La fonction $u : x \mapsto |x|^{-(d-2)}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On rappelle que le Laplacien d'une fonction radiale s'écrit en coordonnées sphériques de la façon suivante :

$$\Delta G(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G(r)}{\partial r} \right).$$

Ici on obtient que $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. La fonction $x \mapsto |x|^{2-d}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Par le théorème de convergence dominée et le changement de variable $x = \varepsilon y$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x|^{d-2}} \Delta \phi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{|x|^{d-2}} \Delta \phi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>1} \frac{1}{|y|^{d-2}} \Delta \phi_\varepsilon(y)\, dx.$$

où pour $\varepsilon > 0$ et $y \in \mathbb{R}^d$ on a posé $\phi_\varepsilon(y) = \phi(\varepsilon y)$. Par la formule de Green on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{|x|^{d-2}} \Delta\phi(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon - \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon,$$

où pour $\varepsilon > 0$ on a noté

$$I_\varepsilon = \int_{|y|=1} \frac{1}{|y|^{d-2}} \frac{\partial \phi_\varepsilon}{\partial \nu}(y)\, d\sigma \quad \text{et} \quad J_\varepsilon = \int_{|y|=1} \phi_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|y|^{d-2}}\, d\sigma.$$

On a

$$I_\varepsilon = \varepsilon \int_{|y|=1} \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(\varepsilon y)\, d\sigma \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0,$$

et par le théorème de convergence dominée

$$J_\varepsilon = -(d-2) \int_{|y|=1} \frac{1}{|y|^{d-1}} \phi_\varepsilon(y)\, d\sigma = -(d-2) \int_{|y|=1} \phi_\varepsilon(y)\, d\sigma \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -(d-2)\sigma(S_1)\phi(0).$$

D'où le résultat.