Examen Final

Vendredi 8 janvier 2021 (2 heures)

Exercice 1. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
1. Rappeler la définition de la distribution fT et montrer que c'est effectivement une distribution.
2. Donner (en la démontrant) une expression de la distribution dérivée $(fT)'$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sqrt{|x|}$.
1. Montrer que f est localement intégrable. On note T_f la distribution associée à f.
2. Calculer la dérivée de T_f.

Exercice 3. On utilisera la convention suivante pour la transformée de Fourier. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on note

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

1. Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g_0 = \mathbb{1}_{[-a,a]}$ (fonction indicatrice de l'intervalle $[-a, a]$).
2. Montrer que pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$.
3. Même question en supposant seulement que f et g sont dans $L^2(\mathbb{R})$.
4. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$(Pf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\sin(y)}{y}\, dy.$$

Montrer que $(Pf)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que la fonction Pf ainsi définie est continue.
6. Montrer que $Pf \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|Pf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.
7. Montrer que $P(Pf) = Pf$.

Exercice 4. **1.** Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in]a, b[, \\ f_2(x) & \text{si } x \notin]a, b[. \end{cases}$$

f est localement intégrable. On note $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à f. Sans utiliser la formule des sauts, calculer la distribution dérivée de T_f.
2. On considère maintenant un ouvert Ω borné et de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$. On note $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la normale unitaire extérieure et σ la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$. Étant donnée une fonction continue g sur $\partial\Omega$, on note S_g l'application qui à $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ associe

$$\langle S_g, \phi \rangle = \int_{\partial\Omega} g(x)\phi(x)\, d\sigma(x).$$

Montrer que S_g est une distribution sur $\mathbb{R}^2$ et préciser son ordre (on admettra que $\partial\Omega$ est de mesure finie).

3. On note $\mathbb{1}_\Omega$ la fonction indicatrice de Ω ($\mathbb{1}_\Omega(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $\mathbb{1}_\Omega(x) = 0$ si $x \notin \Omega$). On note T la distribution sur $\mathbb{R}^2$ associée à la fonction $\mathbb{1}_\Omega$. Expliciter les dérivées partielles $\partial_{x_1} T$ et $\partial_{x_2} T$ de T.

4. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ f_2(x) & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

On note T_f la distribution associée à f. Expliciter les dérivées partielles $\partial_{x_1} T_f$ et $\partial_{x_2} T_f$ de T_f.

Exercice 5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Soit g une fonction continue et à support compact sur $\mathbb{R}$. On suppose que g est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

1. Montrer que le produit de convolution $(f * g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction $(f * g)$ est de classe C^1 sur $]-1, 1[$.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Qu'obtient-on si on suppose maintenant que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ au lieu de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$?