Examen Final

Vendredi 8 janvier 2021 (2 heures)

Exercice 1. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
1. Rappeler la définition de la distribution fT et montrer que c'est effectivement une distribution.
2. Donner (en la démontrant) une expression de la distribution dérivée $(fT)'$.

Correction : **[3 points]** Voir cours.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sqrt{|x|}$.
1. Montrer que f est localement intégrable. On note T_f la distribution associée à f.
2. Calculer la dérivée de T_f.

Correction : **[2,5 points]**
1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est donc localement intégrable.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $f' : x \mapsto \frac{\sqrt{|x|}}{2x}$. Cela définit une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$, donc pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a par le théorème de convergence dominée

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,dx &= -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} f(x)\phi'(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{|x| \geqslant \varepsilon} f'(x)\phi(x)\,dx - \big(f(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\big)\phi(\varepsilon) \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Cela prouve que $T_f' = T_{f'}$.

Exercice 3. On utilisera la convention suivante pour la transformée de Fourier. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on note

$$\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx.$$

1. Soit $a > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g_0 = \mathbb{1}_{[-a,a]}$ (fonction indicatrice de l'intervalle $[-a, a]$).
2. Montrer que pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$.
3. Même question en supposant seulement que f et g sont dans $L^2(\mathbb{R})$.
4. Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$(Pf)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \frac{\sin(y)}{y}\,dy.$$

Montrer que $(Pf)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que la fonction Pf ainsi définie est continue.
6. Montrer que $Pf \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|Pf\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.
7. Montrer que $P(Pf) = Pf$.

Correction : **[10,5 points]**
1. En reprenant le calcul de l'exemple 2.8 on obtient pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$,

$$\widehat{g_0}(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}.$$

On a également $\widehat{g_0}(0) = 2a$.
2. Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi - \eta)\hat{g}(\eta)\,d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy(\xi-\eta)}f(y)\,dy\right)\hat{g}(\eta)\,d\eta.$$

D'après le théorème de Fubini et par la formule d'inversion pour la transformée de Fourier on obtient

$$\frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi}f(y)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{iy\eta}\hat{g}(\eta)\,d\eta\right)dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi}f(y)g(y)\,dy = \widehat{fg}(\xi).$$

3. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui convergent dans $L^2(\mathbb{R})$ vers f et g, respectivement. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\left|\widehat{f_n g_n}(\xi) - \widehat{fg}(\xi)\right| &\leqslant \|f_n g_n - fg\|_{L^1(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \|f_n(g_n - g)\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|(f_n - f)g\|_{L^1(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R})$. D'autre part,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\left|\big(\widehat{f_n} * \widehat{g_n}\big)(\xi) - \big(\hat{f} * \hat{g}\big)(\xi)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\big(\widehat{f_n} * \widehat{g_n}\big)(\xi) - \big(\widehat{f_n} * \hat{g}\big)(\xi)\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\big(\widehat{f_n} * \hat{g}\big)(\xi) - \big(\hat{f} * \hat{g}\big)(\xi)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left\|\widehat{f_n} * (\widehat{g_n} - \hat{g})\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{1}{2\pi}\left\|(\widehat{f_n} - \hat{f}) * \hat{g}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f_n}\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\widehat{g_n} - \hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2\pi}\|\widehat{f_n} - \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}\|\hat{g}\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g_n - g\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})}\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\widehat{f_n g_n}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\big(\widehat{f_n} * \widehat{g_n}\big)(\xi).$$

Par passage à la limite on obtient donc

$$\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\big(\hat{f} * \hat{g}\big)(\xi).$$

4. Pf est bien définie comme produit de convolution des fonctions f et

$$y \mapsto \frac{\operatorname{sinc}(y)}{\pi} = \begin{cases}\frac{\sin(y)}{\pi y}, & \text{si } y \neq 0,\\ \frac{1}{\pi}, & \text{si } y = 0,\end{cases}$$

qui sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $h \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\hat{h} = f$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. D'après la question 1 on a $\hat{g}(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$ pour tout $\xi \neq 0$. On a alors

$$Pf = \frac{1}{\pi} f * \hat{g} = \frac{1}{\pi}\hat{h} * \hat{g} = 2\mathcal{F}(hg) = 2\mathcal{F}\big((\mathcal{F}^{-1}f)g\big).$$

La fonction hg est intégrable, donc sa transformée de Fourier est continue.

6. D'autre part on a $h \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ donc $hg \in L^2(\mathbb{R})$ puis $\widehat{hg} \in L^2(\mathbb{R})$, donc $Pf \in L^2(\mathbb{R})$. En outre

$$\|Pf\|_{L^2(\mathbb{R})} = 2\|\widehat{hg}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant 2\sqrt{2\pi}\,\|hg\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant \sqrt{2\pi}\,\|h\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

7. On a

$$P(Pf) = 2\mathcal{F}\big((\mathcal{F}^{-1}(Pf))g\big) = 4\mathcal{F}\big(\mathcal{F}^{-1}(f)g^2\big).$$

Comme $g^2 = g/2$ on obtient

$$P(Pf) = 2\mathcal{F}\big((\mathcal{F}^{-1}f)g\big) = Pf.$$

Exercice 4. **1.** Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in]a,b[, \\ f_2(x) & \text{si } x \notin]a,b[. \end{cases}$$

f est localement intégrable. On note $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribution associée à f. Sans utiliser la formule des sauts, calculer la distribution dérivée de T_f.
2. On considère maintenant un ouvert Ω borné et de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$. On note $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la normale unitaire extérieure et σ la mesure de Lebesgue sur $\partial\Omega$. Étant donnée une fonction continue g sur $\partial\Omega$, on note S_g l'application qui à $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ associe

$$\langle S_g, \phi\rangle = \int_{\partial\Omega} g(x)\phi(x)\,d\sigma(x).$$

Montrer que S_g est une distribution sur $\mathbb{R}^2$ et préciser son ordre (on admettra que $\partial\Omega$ est de mesure finie).
3. On note $\mathbb{1}_\Omega$ la fonction indicatrice de Ω ($\mathbb{1}_\Omega(x) = 1$ si $x \in \Omega$ et $\mathbb{1}_\Omega(x) = 0$ si $x \notin \Omega$). On note T la distribution sur $\mathbb{R}^2$ associée à la fonction $\mathbb{1}_\Omega$. Expliciter les dérivées partielles $\partial_{x_1}T$ et $\partial_{x_2}T$ de T.
4. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ f_2(x) & \text{si } x \notin \Omega. \end{cases}$$

On note T_f la distribution associée à f. Expliciter les dérivées partielles $\partial_{x_1}T_f$ et $\partial_{x_2}T_f$ de T_f.

Correction : **[6 points]**
1. Pour $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^a f_2(x)\phi'(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\phi'(x)\,dx - \int_b^{+\infty} f_2(x)\phi'(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^a f_2'(x)\phi(x)\,dx - f_2(a)\phi(a) \\
&+ \int_a^b f_1'(x)\phi(x)\,dx - f_1(b)\phi(b) + f_1(a)\phi(a) \\
&+ \int_b^{+\infty} f_2'(x)\phi(x)\,dx + f_2(b)\phi(b) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\phi(x)\,dx + \big(f_1(a) - f_2(a)\big)\phi(a) + \big(f_2(b) - f_1(b)\big)\phi(b),
\end{aligned}$$

où f' désigne la dérivée de f sur $\mathbb{R}\backslash\{a,b\}$. Ainsi on a

$$T'_f = T_{f'} + \big(f_1(a) - f_2(a)\big)\delta_a + \big(f_2(b) - f_1(b)\big)\delta_b.$$

2. L'application S_g est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. En outre g est continue et donc bornée sur le compact $\partial\Omega$. Pour tout $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ on a alors

$$|\langle S_g, \phi\rangle| \leqslant \|\phi\|_\infty \|g\|_\infty \sigma(\partial\Omega).$$

Cela prouve que S_g est continue et définit une distribution d'ordre 0.
3. Soit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. D'après la formule de Green on a

$$\langle \partial_{x_1} T, \phi\rangle = -\langle T, \partial_{x_1}\phi\rangle = -\int_\Omega \partial_{x_1}\phi \, dx = -\int_{\partial\Omega} \phi(x)\nu_1(x)\, d\sigma(x).$$

Ainsi on a $\partial_{x_1} T = -S_{\nu_1}$. On montre de la même façon que $\partial_{x_2} T = -S_{\nu_2}$.
4. On peut faire un calcul analogue à la question précédente, ou bien observer que $f = f_2 + (f_1 - f_2)\mathbb{1}_\Omega$. On obtient alors

$$\partial_{x_1} T_f = \partial_{x_1} T_{f_2} + (\partial_{x_1} f_1 - \partial_{x_1} f_2)\mathbb{1}_\Omega - (f_1 - f_2) S_{\nu_1} = T_{\partial_{x_1} f} - S_{(f_1 - f_2)\nu_1},$$

où $\partial_{x_1} f$ désigne la dérivée partielle de f sur $\mathbb{R}^2\backslash\partial\Omega$. On obtient de même

$$\partial_{x_2} T_f = T_{\partial_{x_2} f} - S_{(f_1 - f_2)\nu_2}.$$

Exercice 5. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Soit g une fonction continue et à support compact sur $\mathbb{R}$. On suppose que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
1. Montrer que le produit de convolution $(f * g)(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $(f * g)$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Qu'obtient-on si on suppose maintenant que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ au lieu de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$?

Correction : **[4 points]**
1. Comme g est continue à support compact, elle est en particulier bornée. Puisque f est intégrable, le produit de convolution $(f * g)$ est bien défini en tout point.
2. Soit $x_1 \in]-1,1[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_1 - 3\varepsilon, x_1 + 3\varepsilon] \subset]-1,1[$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ à support dans $]-2\varepsilon, 2\varepsilon[$ et égale à 1 sur $[-\varepsilon,\varepsilon]$. La fonction $(1-\chi)f$ est de classe C^1, donc $\big((1-\chi)f\big) * g$ est de classe C^1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\big((\chi f) * g\big)(x) = \int_{-2\varepsilon}^{2\varepsilon} f(y)\chi(y)g(x-y)\, dy.$$

La fonction $x \mapsto f(y)\chi(y)g(x-y)$ est dérivable sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ pour tout $y \in]-2\varepsilon, 2\varepsilon[$, de dérivée $f(y)\chi(y)g'(x-y)$. Puisque g' est bornée sur le segment $[x_1 - 3\varepsilon, x_1 + 3\varepsilon]$, il existe M tel que

$$\big|f(y)\chi(y)g'(x-y)\big| \leqslant M\,|f(y)|$$

Comme f est intégrable, on obtient par le théorème de dérivation sous l'intégrale que $\big((\chi f) * g\big)$ est dérivable sur $]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[$ et sa dérivée vérifie

$$\big((\chi f) * g\big)'(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\chi(y)g'(x_1 - y)\, dy.$$

Cela étant valable pour tout $x_1 \in]-1,1[$, cela prouve que $\big((\chi f) * g\big)$ est dérivable sur $]-1,1[$. On obtient ensuite par le théorème de continuité sous l'intégrale que $\big((\chi f) * g\big)'$ est continue sur $]-1,1[$, d'où $\big((\chi f) * g\big)$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $h(x) = f(x + x_0)$. Ainsi h est intégrable sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, donc $(h * g)$ est de classe C^1 sur $]-1,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(f * g)(x) = (h * g)(x - x_0).$$

On en déduit que $(f * g)$ est de classe C^1 sur $]-1 + x_0, 1 + x_0[$.