CC 2

Lundi 26 avril 2021 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Dans tous les exercices, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont munis de leurs tribus boréliennes et de la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. On note

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 < 4\}.$$

Montrer que la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2$ est intégrable sur D et donner la valeur de son intégrale.

Correction : On commence par observer que D est le disque ouvert de centre (1,2) et de rayon 2. C'est en particulier un borélien de $\mathbb{R}^2$. C'est aussi une partie bornée. Par ailleurs, f est une fonction continue et donc mesurable sur D. Comme elle est bornée sur D borné, elle est intégrable.

Pour $r \in]0,2[\times]-\pi,\pi[$ on pose $\Phi(r,\theta) = (1+r\cos(\theta), 2+r\sin(\theta))$. C'est la composée du C^1-difféomorphisme donnant les coordonnées polaires avec la translation $(x,y) \mapsto (x+1,y+2)$ (dont le déterminant jacobien vaut 1). C'est donc un C^1-difféomorphisme de $]0,2[\times]-\pi,\pi[$ dans $D \setminus \mathcal{D}_-$, où $\mathcal{D}_-$ est la demi-droite $\mathcal{D}_- = \{(x,2), x \leqslant 1\}$. En outre, pour tout $(r,\theta) \in]0,2[\times]-\pi,\pi[$ on a $\mathsf{det}\big(\mathsf{Jac}\,\Phi(r,\theta)\big) = r$.

Comme $\mathcal{D}_-$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$ on a

$$\int_D f\,d\lambda_2 = \int_{D\setminus\mathcal{D}_-} f\,d\lambda_2 = \int_{\Phi(]0,2[\times]-\pi,\pi[)} x^2\,d\lambda_2(x,y) = \int_{]0,2[\times]-\pi,\pi[} \big(1+r\cos(\theta)\big)^2\,r\,d\lambda_2(r,\theta).$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a alors

$$\int_D f\,d\lambda_2 = \int_{r=0}^{2} \left(\int_{\theta=-\pi}^{\pi} (r + 2r^2\cos(\theta) + r^3\cos(\theta)^2)\,d\theta\right) dr.$$

Il s'agit maintenant de calculer des intégrales de fonctions continues sur des segments de $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse on obtient finalement

$$\begin{aligned}\int_D f\,d\lambda_2 &= \int_{r=0}^{2} r^3 \left(\int_{\theta=-\pi}^{\pi} \left(r + 2r^2\cos(\theta) + \frac{r^3}{2}(1-\cos(2\theta))\right) d\theta\right) dr \\ &= \int_{r=0}^{2} \left[r\theta + 2r^2\sin(\theta) + \frac{r^3\theta}{2} - \frac{r^3\sin(2\theta)}{4}\right]_{\theta=-\pi}^{\pi} dr \\ &= \int_{r=0}^{2} \left(2\pi r + \pi r^3\right) dr = 8\pi.\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. Pour $x > 0$ on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} P(t)e^{-tx}\,dt.$$

Montrer que F est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$.

> <u>Correction :</u> Pour $x > 0$ la fonction $t \mapsto P(t)e^{-tx}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et par croissances comparées on a
>
> $$\left|P(t)e^{-tx}\right| = O_{t\to+\infty}(e^{-\frac{tx}{2}}).$$
>
> La fonction $t \mapsto e^{-\frac{tx}{2}}$ étant intégrable sur $[0, +\infty[$, cela prouve que l'intégrale $F(x)$ est bien définie.
>
> Soit $a > 0$. Pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto P(t)e^{-tx}$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto -tP(t)e^{-tx}$. Pour tous $t \geqslant 0$ et $x \geqslant a$ on a
>
> $$\left|-tP(t)e^{-tx}\right| \leqslant t\,|P(t)|\,e^{-at}.$$
>
> La fonction $t \mapsto t\,|P(t)|\,e^{-at}$ étant intégrable sur $[0, +\infty[$ (par croissances comparées, comme précédemment), on obtient par le théorème de dérivation sous l'intégrale que F est dérivable sur $[a, +\infty[$. Ceci étant valable pour tout $a > 0$, cela prouve que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. **1.** Soit $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable, d'intégrale égale à 1. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

a. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction ρ_ε est intégrable d'intégrale 1.
b. Soit $\eta > 0$. Étudier la limite éventuelle de

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \rho_\varepsilon(x)\,dx$$

quand ε tend vers 0.

2. Montrer qu'il existe une fonction ρ comme à la question précédente telle que pour tous $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\,d\xi = \rho_\varepsilon(x).$$

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ on pose

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\,dx.$$

Justifier que cette définition a bien un sens (on commencera par remplacer f par un représentant puis on justifiera le passage au quotient).

4. Pour la suite de l'exercice on suppose que $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi \quad \text{et} \quad F_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\hat{f}(\xi)\,d\xi.$$

a. Montrer que cela définit une fonction F continue sur $\mathbb{R}$. On admettra que c'est également le cas pour F_ε, quel que soit $\varepsilon > 0$.

b. Montrer que F_ε converge simplement vers F quand ε tend vers 0.

5. a. Soit $\tilde{f}$ un représentant de f. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$F_\varepsilon(x) - \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\big)\rho_\varepsilon(y)\,dy,$$

où ρ_ε est comme à la question 2.

b. Montrer que

$$\|F_\varepsilon - f\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|\tau_y f - f\|_1 \,\rho_\varepsilon(y)\,dy,$$

où on a noté $\tau_y f : x \mapsto f(x-y)$.

c. En déduire que F_ε tend vers f dans $L^1(\mathbb{R})$ quand ε tend vers 0.

6. En déduire que $F = f$ presque partout (plus précisément, la fonction F est dans la classe d'équivalence f).

Correction : **1.** a. On note que ρ est mesurable et à valeurs positives. Par composition avec la division par ε, c'est donc aussi le cas pour ρ_ε pour tout $\varepsilon > 0$. En effectant le changement de variable $x = \varepsilon y$, $dx = \varepsilon\,dy$, on calcule

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \rho(y)\,dy = 1.$$

b. Pour $\eta > 0$ on obtient avec le même changement de variable

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \rho_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{\eta}{\varepsilon},\frac{\eta}{\varepsilon}]} \rho(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{\eta}{\varepsilon},\frac{\eta}{\varepsilon}]}(y)\rho(y)\,dy.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{\eta}{\varepsilon},\frac{\eta}{\varepsilon}]}(y)\rho(y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

En outre pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ on a

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{\eta}{\varepsilon},\frac{\eta}{\varepsilon}]}(y)\rho(y) \leqslant \rho(y).$$

Comme ρ est intégrable, on obtient par le théorème de convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \rho_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

2. On observe que la fonction $\xi \mapsto e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et décroit comme $e^{-\varepsilon|\xi|}$ à l'infini. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $A > 0$ on a

$$\int_{-A}^{A} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|} = \int_{-A}^{0} e^{ix\xi}e^{\varepsilon\xi}\,d\xi + \int_{0}^{A} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon\xi}\,d\xi.$$

Pour chacune des deux intégrales on peut appliquer le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_{-A}^{A} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\,d\xi = \left[\frac{e^{ix\xi+\varepsilon\xi}}{ix+\varepsilon}\right]_{-A}^{0} + \left[\frac{e^{ix\xi-\varepsilon\xi}}{ix-\varepsilon}\right]_{0}^{A}.$$

Par passage à la limite ($A \to +\infty$) on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\,d\xi = \frac{1}{ix+\varepsilon} - \frac{1}{ix-\varepsilon} = \frac{-2\varepsilon}{-x^2-\varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}.$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon\xi}\,d\xi = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

où pour $y \in \mathbb{R}$ on a posé

$$\rho(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

La fonction ρ ainsi définie est bien mesurable (car continue), à valeurs positives et d'intégrale 1 (car une primitive est donnée par $y \mapsto \frac{1}{\pi}\arctan(y)$).

3. Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ un représentant de f. La fonction $x \mapsto e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)$ est mesurable comme produit d'une fonction continue (donc mesurable) et d'une fonction mesurable. En outre, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|e^{ix\xi}\tilde{f}(x)| = |\tilde{f}(x)|$. Comme $\tilde{f}$ est intégrable, la fonction $x \mapsto e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)$ est intégrable. On peut donc poser

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx.$$

Si $\tilde{f}_2$ est un autre representant de f, $\tilde{f}$ et $\tilde{f}_2$ sont deux fonctions intégrables qui coïncident presque partout. Les fonctions $x \mapsto e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)$ et $x \mapsto e^{-ix\xi}\tilde{f}_2(x)$ coincident également presque partout, donc leurs intégrales sont égales. La définition de $\hat{f}(\xi)$ ne dépend donc pas du choix d'un représentant.

4. a. Pour $\xi \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)$ est continue sur $\mathbb{R}$. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$\left|e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\right| = \left|\hat{f}(\xi)\right|.$$

Comme $\hat{f}$ est intégrable, on obtient que F est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorème de continuité sous l'intégrale.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\hat{f}(\xi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}.$$

En outre pour tout $\varepsilon > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ on a

$$|e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\hat{f}(\xi)| \leqslant |\hat{f}(\xi)|.$$

Comme $\hat{f}$ est intégrable par hypothèse, on obtient par le théorème de convergence dominée que

$$F_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F(x).$$

5. a. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On a

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\hat{f}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi}\tilde{f}(y)\,dy\right)d\xi.$$

Pour $(y,\xi) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\left|e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}e^{-iy\xi}\tilde{f}(y)\right| = e^{-\varepsilon|\xi|}\left|\tilde{f}(y)\right|$$

Comme $\tilde{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $(y,\xi) \mapsto e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}e^{-iy\xi}\tilde{f}(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de Fubini-Lebesgue on a alors

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-\varepsilon|\xi|}e^{-iy\xi}\,d\xi\right)dy$$

D'après la question 2 cela donne

$$F_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)\rho_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x-z)\rho_\varepsilon(z)\,dz.$$

Pour la deuxième égalité on a utilisé le changement de variable affine $z = x-y$, $dz = -dy$. D'autre part, comme l'intégrale de ρ_ε vaut 1 on a

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\rho_\varepsilon(z)\,dz.$$

D'où l'égalité demandée.

b. D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left|F_\varepsilon(x) - \tilde{f}(x)\right|\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left|\int_{\mathbb{R}} \big(\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\big)\rho_\varepsilon(y)\,dy\right|\,dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\right|\rho_\varepsilon(y)\,dy\right)\,dx\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \left|F_\varepsilon(x) - \tilde{f}(x)\right|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\tilde{f}(x-y) - \tilde{f}(x)\right|\,dx\right)\rho_\varepsilon(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left\|\tau_y\tilde{f} - \tilde{f}\right\|_1 \rho_\varepsilon(y)\,dy.$$

Cela prouve

$$\left\|F_\varepsilon - \tilde{f}\right\| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left\|\tau_y\tilde{f} - \tilde{f}\right\|_1 \rho_\varepsilon(y)\,dy.$$

Le résultat ne dépend pas d'un représentant. On peut donc passer au quotient, ce qui donne l'égalité demandée.

c. Soit $\delta > 0$. Comme $\|\tau_y f - f\|_1$ tend vers 0 quand y tend vers 0, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\tau_y f - f\|_1 \leqslant \frac{\delta}{2}$ pour tout $y \in [-\eta, \eta]$. D'après la question 2.b il existe alors ε_0 tel que pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ on a

$$2\,\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \rho_\varepsilon(x)\,dx \leqslant \frac{\delta}{2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\|F_\varepsilon - f\|_1 &\leqslant \int_{[-\eta,\eta]} \|\tau_y f - f\|_1 \rho_\varepsilon(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \|\tau_y f - f\|_1 \rho_\varepsilon(y)\,dy \\ &\leqslant \frac{\delta}{2}\int_{[-\eta,\eta]} \rho_\varepsilon(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \big(\,\|\tau_y f\|_1 + \|f\|_1\,\big)\rho_\varepsilon(y)\,dy \\ &\leqslant \frac{\delta}{2} + 2\,\|f\|_1 \int_{\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]} \rho_\varepsilon(y)\,dy \\ &\leqslant \delta.\end{aligned}$$

Cela prouve que

$$\|F_\varepsilon - f\|_1 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

6. Soit (ε_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. La suite (F_{ε_n}) tend vers f dans L^1, donc il existe une sous-suite $(F_{\varepsilon_{n_k}})$ (avec (n_k) suite strictement croissante d'entiers) qui converge simplement presque partout vers f. Comme par ailleurs $F_{\varepsilon_{n_k}}$ converge presque partout vers F, cela prouve que $F = f$ presque partout.