

Théorie de la Mesure et de l'Intégration

Exercices

E.1 Prologue

Exercice 1 (À la grecque). On considère dans \mathbb{R}^2 la parabole \mathcal{P} d'équation $y = 1 - x^2$, puis on note \mathcal{S} la région délimitée par \mathcal{P} et l'axe des abscisses :

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} \mid 0 < y < 1 - x^2\}.$$

1. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$ avec $a < b$. On note T le triangle formé par les points de \mathcal{P} d'abscisses a , $\frac{a+b}{2}$ et b . Montrer que l'aire de T est $(b - a)^3/8$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket$ $x_{n,k} = -1 + k2^{-n+1}$. Pour $k \in \llbracket 1, 2^n \rrbracket$ on note alors $T_{n,k}$ le triangle formé par les points de \mathcal{P} d'abscisses $x_{n,k-1}$, $\frac{x_{n,k-1} + x_{n,k}}{2}$ et $x_{n,k}$. Montrer que l'aire de $T_{n,k}$ vaut 2^{-3n} .
3. En déduire que l'aire de \mathcal{S} est supérieure ou égale à $\sum_{n \in \mathbb{N}} 4^{-n}$.
4. Calculer l'aire de \mathcal{S} à l'aide d'une intégrale et comparer à cette somme.

Exercice 2. Expliciter les parties de \mathbb{R} suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $([1, 6] \cap [0, 5]) \setminus [3, 8]$ | 6. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ |
| 2. $[1, 6] \cap ([0, 5] \setminus [3, 8])$ | 7. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$ |
| 3. $([1, 6] \cup [0, 5]) \setminus [3, 8]$ | 8. $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} [n, +\infty[$ |
| 4. $[1, 6] \cup ([0, 5] \setminus [3, 8])$ | 9. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]0, \frac{1}{n}[$ |
| 5. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ | 10. $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}}]q - \varepsilon, q + \varepsilon[$, où $\varepsilon > 0$ |

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner l'image réciproque de $]a, +\infty[$ par la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = -3x + 5$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$
5. $f(x) = x$ si $x \geq 0$ et $f(x) = -x + 1$ si $x < 0$
6. $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$

E.2 Rappels d'intégration pour les fonctions continues

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln(x)^4}{x} dx, \quad I_2 = \int_1^e x^2 \ln(x) dx$$

Exercice 5. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]^2$. Pour $x \in [0, 1]$ on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t, 1) dt, \quad G(x) = \int_0^1 f(t, x) dt, \quad H(x) = \int_0^x f(t, x) dt.$$

Montrer que F , G et H sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ et calculer leurs dérivées. On pourra éventuellement commencer par considérer le cas $f(x_1, x_2) \mapsto \cos(x_1 x_2)$ et faire des calculs explicites.

Exercice 6. Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt$.

Exercice 7. Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$$

est convergente et donner sa valeur.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx) \sin(x)^2}{n} dx.$$

Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 9. 1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère sur \mathbb{R} la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq x \leq n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, dessiner le graphe de f_n .
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

c. Montrer que l'intégrale « généralisée » $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la calculer, et étudier sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2. Mêmes questions avec les fonctions g_n et h_n définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{n^2} & \text{si } 0 \leq x < n, \\ \frac{2}{n} - \frac{x}{n^2} & \text{si } n \leq x < 2n, \\ 0 & \text{si } x \geq 2n. \end{cases} \quad \text{et} \quad h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ n^2 x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ 2n - n^2 x & \text{si } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{2}{n}. \end{cases}$$

3. Sur le même modèle, donner des exemples de suites de fonctions (\tilde{f}_n) , (\tilde{g}_n) et (\tilde{h}_n) qui convergent ponctuellement vers 0 mais telles que les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_n dx$, $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_n dx$ et $\int_{\mathbb{R}} \tilde{h}_n dx$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans \mathbb{R} . Pour $f \in E$ on pose

$$N_1(f) = \int_{-1}^1 |f(x)| dx \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx}.$$

- Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E .
- Montrer que E muni de la norme N_2 est un espace pré-hilbertien.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$ on pose

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ nx & \text{si } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite dans E pour la norme N_1 .

- Montrer que l'espace vectoriel normé (E, N_1) n'est pas complet.
- Montrer que l'espace pré-hilbertien (E, N_2) n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 11. On considère la fonction $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 5 - x & \text{si } 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

On cherche à calculer l'aire \mathcal{A} comprise entre le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 5$ en encadrant f par des fonctions constantes par morceaux.

1. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\delta = \frac{1}{N}$.

a. Soit $k \in \llbracket 0, 5N - 1 \rrbracket$. Donner un encadrement de f sur l'intervalle $[k\delta, (k+1)\delta]$.

b. En déduire un encadrement de l'aire \mathcal{A}_k comprise entre le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = k\delta$ et $x = (k+1)\delta$.

c. En déduire un encadrement de \mathcal{A} et conclure.

2. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\delta = \frac{1}{N}$. Pour $k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ on note

$$B_k = f^{-1}(\llbracket k\delta, (k+1)\delta \rrbracket).$$

a. Calculer B_k . On constatera que B_k est une union finie d'intervalles deux à deux disjoints et on notera ℓ_k la somme des longueurs de ces intervalles.

b. Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{N-1} \ell_k k\delta \leq \mathcal{A} \leq \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k (k+1)\delta,$$

et en déduire la valeur de \mathcal{A} .

E.3 Dénombrabilité

Exercice 12. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont dénombrables :

- (i) $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$,
- (ii) $\{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$,
- (iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$,
- (iv) $\{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$,
- (v) l'ensemble des nombres premiers,
- (vi) l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 13. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est presque nulle s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 0$ pour tout $n \geq N$. On dit qu'elle est stationnaire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_m$ pour tous $n, m \geq N$.

1. Montrer que l'ensemble des suites presque nulles à valeurs dans \mathbb{N} est dénombrable.
2. L'ensemble des suites stationnaires à valeurs dans \mathbb{N} est-il dénombrable ?

Exercice 14. Soit E un ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est fini ou indénombrable.

Exercice 15. Soit A un ensemble et $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'intervalles de \mathbb{R} ouverts, non vides, et deux à deux disjoints. Montrer que A est dénombrable.

Exercice 16. 1. Soit U un ouvert de \mathbb{R} .

a. Soit $x \in U$. Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x \in \left] q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n} \right[\subset U.$$

b. Montrer que U est union dénombrable d'intervalles ouverts.

2. On munit \mathbb{R}^d d'une norme quelconque. Montrer que tout ouvert de \mathbb{R}^d est union dénombrable de boules ouvertes de \mathbb{R}^d . Même question en remplaçant « boule ouverte » par « boule fermée ».

Exercice 17. On dit d'un réel x qu'il est algébrique s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{k=0}^d a_k x^k = 0.$$

Montrer qu'il existe des réels qui ne sont pas algébriques.

Exercice 18. 1. Montrer que \mathbb{R}^d s'écrit comme union dénombrable de parties compactes.
2. Soient $(\mathcal{V}_j)_{j \in J}$ une famille d'ouverts de \mathbb{R}^d telle que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{j \in J} \mathcal{V}_j$. Montrer qu'il existe une suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de J tels que $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{j_n}$. Autrement dit, de tout recouvrement ouvert de \mathbb{R}^d on peut extraire un recouvrement dénombrable.

E.4 Tribus et mesures

Exercice 19. Montrer que les mesures sur $(X, \mathcal{P}(X))$ données en exemple sont effectivement des mesures.

Exercice 20. On modélise les résultats d'un jet de deux dés par l'ensemble $C = \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$. On munit C de la mesure uniforme μ . Pour $(j, k) \in C$ on pose $f(j, k) = j + k$. On note S l'ensemble $\llbracket 2, 12 \rrbracket$. Pour $B \in \mathcal{P}(S)$ on pose

$$\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)) = \frac{\text{Card} \{(j, k) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid j + k \in B\}}{\text{Card}(C)}.$$

1. Montrer que $\nu(S) = 1$.
2. Calculer $\nu(\{s\})$ pour tout $s \in S$.
3. Calculer $\nu(\{2, 4, 6, 8, 10, 12\})$.

Exercice 21. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge. Réinterpréter en terme de mesure le fait que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 22. Soit \mathcal{M} une tribu de X et $E \in \mathcal{P}(X)$. Montrer que

$$\mathcal{M}_E := \{A \cap E, A \in \mathcal{M}\}$$

est une tribu de E . On dira que \mathcal{M}_E est la tribu induite par \mathcal{M} sur E .

Exercice 23. Déterminer la tribu de \mathbb{R} engendrée par $\{[0, 2], [1, 3]\}$.

Exercice 24. Soit X un ensemble. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A_1, \dots, A_n des parties deux à deux disjointes de X telles que $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Déterminer le nombre d'éléments de la tribu de X engendrée par $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Exercice 25. Soit X un ensemble.

1. Déterminer la tribu engendrée par les singletons de X .
2. Déterminer la tribu engendrée par les parties de X contenant deux éléments.

Exercice 26. Soient X un ensemble et A une partie de X . Déterminer la tribu engendrée par les parties de X contenant A .

Exercice 27. Soit X un ensemble. Soient \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 deux tribus de X . Déterminer les tribus engendrées par $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ et par $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.

Exercice 28. Soit X un ensemble non vide. On appelle algèbre de X une famille \mathcal{A} de parties de X telle que $X \in \mathcal{A}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a $X \setminus A \in \mathcal{A}$ et $A \cup B \in \mathcal{A}$.

1. Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. Montrer qu'il existe une plus petite algèbre (au sens de l'inclusion) contenant P .
2. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'algèbres de X telle que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est une algèbre de X .
3. Que dire de la question précédente si on remplace « algèbre » par « σ -algèbre » ? On pourra par exemple considérer $X = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \sigma(\{0\}, \dots, \{n\})$.

Exercice 29. Soient (X, \mathcal{M}) un espace mesurable, Y un ensemble et φ une fonction de X dans Y .

1. Montrer que $\mathcal{N} = \{B \mid \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$ est une tribu sur Y . On l'appelle tribu image de \mathcal{M} par φ .
2. Expliciter \mathcal{N} lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Même question lorsque $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$.
3. On suppose que φ est une bijection. Montrer que \mathcal{M} est la tribu image de \mathcal{N} par φ^{-1} .

Exercice 30. Soient X un ensemble, (Y, \mathcal{N}) un espace mesurable et φ une fonction de X dans Y . Montrer que

$$\mathcal{M} = \{\varphi^{-1}(B), B \in \mathcal{N}\}$$

est une tribu sur X .

Exercice 31. Soient X et Y deux ensembles. Soit φ une application de X dans Y .

1. Soit \mathcal{F} une famille de parties de Y . On note

$$\varphi^{-1}(\mathcal{F}) = \{\varphi^{-1}(F), F \in \mathcal{F}\}.$$

On définit de même $\varphi^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$. Montrer que $\sigma(\varphi^{-1}(\mathcal{F})) = \varphi^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

2. On suppose que X et Y sont des ouverts de \mathbb{R}^d et que φ est un homéomorphisme de X dans Y . Montrer que la tribu image de la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$ par φ est la tribu borélienne $\mathcal{B}(Y)$ de Y .

Exercice 32. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par l'ensemble des intervalles de la forme $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{Q}$.

Exercice 33. Soit X un espace topologique, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$. Soit F une partie de X , muni de la topologie induite et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(F)$ correspondante.

1. Montrer que

$$\mathcal{B}(F) = \{A \cap F, A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

2. Montrer que si F est un borélien de X alors $\mathcal{B}(F)$ est simplement l'ensemble des boréliens de X inclus dans F .

Exercice 34. On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens de \mathbb{R} .

- (i) L'ensemble des réels x tels que $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.
- (ii) L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- (iii) L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ a 0 pour valeur d'adhérence.

Exercice 35. 1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

2. Montrer que pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 36. On note P l'ensemble des pavés de \mathbb{R}^d de la forme

$$\prod_{j=1}^d \left[\frac{n_j}{2^{-k}}, \frac{n_j + 1}{2^{-k}} \right],$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que P est un ensemble dénombrable de parties de \mathbb{R}^d .
2. Montrer que tout ouvert de \mathbb{R}^d est union d'éléments de P .
3. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(P)$.
4. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par l'ensemble des boules euclidiennes ouvertes (respectivement fermées).
5. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par les demi-espaces de la forme

$$\mathbb{R}^{j-1} \times]a, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-j},$$

avec $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 37. Soient X un ensemble et \mathcal{F} une famille de parties de X . Montrer que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F})$ il existe une famille dénombrable \mathcal{D} d'éléments de \mathcal{F} telle que $A \in \sigma(\mathcal{D})$. *Indication : on pourra montrer que l'ensemble des A dans $\sigma(\mathcal{F})$ vérifiant cette propriété est une tribu sur X .*

Exercice 38. Montrer qu'une tribu contient toujours un nombre fini ou indénombrable d'éléments.

Exercice 39. Pour $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on note $m(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $m(A) = +\infty$ sinon. L'application m ainsi définie est-elle une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$?

Exercice 40. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Montrer que l'application

$$m = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \delta_{x_n}$$

définit une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

Exercice 41. Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et $E \in \mathcal{M}$. On note \mathcal{M}_E la tribu induite sur E (voir Exercice 22).

1. Montrer que tout $A \in \mathcal{M}$ est également dans \mathcal{M}_E .

2. Pour $A \in \mathcal{M}_E$ on note

$$\mu_E(A) = \mu(A \cap E) = \mu(A).$$

Montrer que cela définit une mesure μ_E sur E .

Exercice 42. Soient (X, \mathcal{M}) un espace mesurable, Y un ensemble et φ une fonction de X dans Y . On note \mathcal{N} la tribu image de \mathcal{M} par φ (voir l'exercice 21). Pour $B \in \mathcal{N}$ on pose

$$\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)).$$

1. Montrer que cela définit une mesure ν sur (Y, \mathcal{N}) . Elle est appelée mesure image de μ par f .

2. Expliciter ν lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ et $\mu = \delta_{x_0}$, où x_0 est un élément de X .

Exercice 43. On considère une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note \mathcal{O} l'union de tous les ouverts de \mathbb{R} de mesure nulle. Montrer que \mathcal{O} est un ouvert de mesure nulle. En déduire qu'il existe un plus grand ouvert de \mathbb{R} (au sens de l'inclusion) de mesure nulle.

Exercice 44. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert \mathcal{O} dense dans \mathbb{R} et tel que

$$\lambda(\mathcal{O}) \leq \varepsilon.$$

Exercice 45. Soit μ une mesure sur les boréliens de \mathbb{R} , finie sur les compacts. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \begin{cases} \mu(]x_0, x]) & \text{si } x > x_0, \\ -\mu(]x, x_0]) & \text{si } x \leq x_0. \end{cases}$$

1. Montrer que cela définit une fonction F de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , croissante et continue à droite en tout point.

2. Montrer que F est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.

3. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$ est dénombrable.

Exercice 46. Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties mesurables. On note B l'ensemble des $x \in X$ tel que $x \in A_n$ pour une infinité d'indices n .

1. Montrer que B est mesurable.

2. On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ converge. Montrer que $\mu(B) = 0$.

Exercice 47. 1. Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer que le graphe de f est de mesure nulle dans \mathbb{R}^2 (muni de la mesure de Lebesgue).

2. Soit f une fonction de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 . Montrer que $f(\mathbb{R})$ est de mesure nulle dans \mathbb{R}^2 (toujours muni de la mesure de Lebesgue). Le résultat est-il encore vrai si f est seulement continue ?

Exercice 48. Donner un exemple de mesure μ qui est σ -finie sur \mathbb{R} et telle que $\mu(]-n, n]) = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

E.5 Fonctions mesurables

Exercice 49. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est-elle borélienne sur \mathbb{R} ?

Exercice 50. Soit (X, \mathcal{M}) un espace mesurable.

1. Vérifier que si $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ alors toute fonction de X dans n'importe quel espace mesurable est mesurable.

2. On suppose maintenant que $\mathcal{M} \neq \mathcal{P}(X)$. Donner un exemple de fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui n'est pas mesurable mais telle que $|f|$ l'est.

Exercice 51. Montrer que la réciproque d'une bijection mesurable n'est pas nécessairement mesurable.

Exercice 52. 1. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer directement (*i.e.* sans utiliser le cours) que les fonctions $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = \max(-f, 0)$ sont mesurables.

2. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer que les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des fonctions mesurables de X dans \mathbb{R} .

Exercice 53. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante est mesurable.

Exercice 54. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à droite.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère sur \mathbb{R} la fonction f_n telle que, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -n, \\ f(\frac{p}{n}) & \text{si } x \in]-n, n] \text{ et } \frac{p-1}{n} < x \leq \frac{p}{n}, \text{ avec } p \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } x > n. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f_n ainsi définie est mesurable.

2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers f .

3. En déduire que f est mesurable.

4. Montrer qu'une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à gauche est mesurable.

Exercice 55. Soient (X, \mathcal{M}) un espace mesurable et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $\omega : X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $x \in X$ on a $|\omega(x)| = 1$ et $f(x) = |f(x)|\omega(x)$.

E.6 Intégration

Exercice 56. Soit X un ensemble non vide, muni de la tribu triviale $\mathcal{P}(X)$. Soit $x_0 \in X$. On considère sur X la mesure de Dirac δ_{x_0} . Montrer que toute fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et que

$$\int_X f(x) d\delta_{x_0}(x) = f(x_0).$$

Exercice 57. Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et $E \in \mathcal{M}$. On considère sur E la tribu \mathcal{M}_E induite par \mathcal{M} sur E et la mesure μ_E induite par μ (voir les exercices 22 et 41). Soit f une fonction intégrable de X dans \mathbb{R} . Montrer que la restriction $f|_E$ de f à E est intégrable et

$$\int_E f|_E d\mu_E = \int_X \mathbb{1}_E f d\mu.$$

Exercice 58 (Théorème de changement de variables). Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré, Y un ensemble, et φ une fonction de X dans Y . On munit Y de la tribu image \mathcal{N} de \mathcal{M} par φ et de la mesure image ν de μ par φ .

1. Soit $f : Y \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable.

a. Montrer que $f \circ \varphi$ est une fonction mesurable de X dans $[0, +\infty]$.

b. Soit $A \in \mathcal{N}$. Montrer que $\mathbb{1}_A \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(A)}$.

c. Montrer que

$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ \varphi) d\mu.$$

2. Soit $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

- Montrer que $f \circ \varphi$ est une fonction mesurable de X dans \mathbb{R} .
- Montrer que f est intégrable sur Y si et seulement si $f \circ \varphi$ est intégrable sur X .
- Montrer que si f est intégrable sur Y on a

$$\int_Y f d\nu = \int_X (f \circ \varphi) d\mu.$$

Exercice 59. Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et f une fonction intégrable de X dans \mathbb{R} .
1. Montrer que pour tout $a > 0$ on a

$$\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X |f| d\mu.$$

2. Montrer que

$$a\mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq a\}) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 60. Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et f une fonction intégrable de X dans \mathbb{R} .
Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu(A) \leq \delta \implies \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

E.7 Passage à la limite sous l'intégrale

Exercice 61. Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Exercice 62. Soit f une fonction borélienne de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}_+ . On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{[0,1]} e^{nx} f d\lambda(x) \leq M.$$

- Montrer que $f = 0$ p.p.
- On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f = 0$.

Exercice 63. On munit $[-1, 1]$ de la mesure de Lebesgue λ . Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n = \mathbb{1}_{[0,1]}$ si n est pair et $f_n = \mathbb{1}_{[-1,0]}$ si n est impair.

- Vérifier que f_n est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer

$$\int_{[-1,1]} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[-1,1]} f_n d\lambda.$$

Exercice 64. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R}_+ . Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} e^{-n \sin(x)^2} f(x) dx.$$

Exercice 65. Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx.$$

Exercice 66. Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} dx.$$

Exercice 67. 1. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 x^{2n} (1-x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

2. En déduire que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{1+n} = \ln(2).$$

Exercice 68. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Étudier la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \cos(\pi x)^n d\mu(x).$$

On commencera par vérifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 69. Soit $(a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}}$ une famille de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{j,k}.$$

Exercice 70. Étudier la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$$

Exercice 71. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tels que la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

converge simplement vers 0 pour tout $x \in [a, b]$. On veut montrer que a_n et b_n tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\varphi_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = r_n \cos(nx + \varphi_n),$$

où $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

2. On suppose pour cette question que la fonction $x \mapsto r_n \cos(nx + \varphi_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$ quand n tend vers $+\infty$. Montrer que $r_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

3. On suppose que r_n ne tend pas vers 0. Montrer qu'il existe une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers qui tend vers $+\infty$ et telle que

$$\int_a^b \cos(n_k x + \varphi_{n_k})^2 dx \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0.$$

4. Montrer que

$$\int_a^b \cos(nx + \varphi_n)^2 dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{b-a}{2}$$

et conclure.

Exercice 72. On cherche à montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^n}.$$

1. Montrer que les deux membres de l'égalité sont bien définis.

2. Pour $p, q \in \mathbb{N}$ on note $I(p, q) = \int_0^1 x^p \ln(x)^q dx$.

- a. Montrer que l'intégrale $I(p, q)$ est bien définie pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
 b. Calculer $I(p, 0)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
 c. En déduire la valeur de $I(p, q)$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
3. En développant $\frac{1}{x^x}$ en série, montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} I(n, n).$$

4. Conclure.

Exercice 73. Soit $f \in \mathcal{L}^1([0, 1])$. On suppose que pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$\int_0^x f(t) dt = 0.$$

Montrer que $f = 0$ presque partout.

E.8 Intégrales à paramètres

Exercice 74. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t^n) dt.$$

Exercice 75. Étudier la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x)^n dx.$$

Exercice 76. Pour $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ on pose

$$f(t, x) = \cosh\left(\frac{t}{1+x}\right) - 1.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $f(t, \cdot)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . On note alors

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, \cdot) d\lambda = \int_0^{+\infty} f(t, x) dx.$$

2. Montrer que la fonction F est continue et dérivable, et donner une expression de F' .

Exercice 77. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur \mathbb{R} (intégrable sur tout segment de \mathbb{R}). Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{[a, x]} f d\lambda & \text{si } x \geq a, \\ -\int_{[x, a]} f d\lambda & \text{si } x < a. \end{cases}$$

Montrer que F est bien définie et est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 78. On considère les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} .
2. Montrer que la fonction $h(x) = g(x) + f^2(x)$ est constante.
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 79. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ est convergente. On note alors $\varphi(x)$ sa valeur.

2. Montrer que cela définit une fonction φ de classe C^1 sur \mathbb{R} .

3. Montrer que $\varphi'(x) = -\frac{x\varphi(x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. En déduire (avec l'exercice précédent) que $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

Exercice 80. Pour $x \geq 0$, on pose

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que ψ est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que ψ est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
4. Calculer $\psi(0)$ et étudier la limite de ψ en $+\infty$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\psi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\int_0^{+\infty} \psi'(x) dx = -2 \left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \right)^2$.
7. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 81. (Fonction Gamma) Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. La fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

1. Étudier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que Γ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa dérivée.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Γ est de classe C^k et calculer $\Gamma^{(k)}$.

E.9 Intégrales multiples

Exercice 82. Soient (X_1, \mathcal{M}_1) et (X_2, \mathcal{M}_2) deux espaces mesurables. Montrer qu'en général l'ensemble des rectangles mesurables de $X_1 \times X_2$ n'est pas une tribu.

Exercice 83. Soient (X, \mathcal{M}) et (Y, \mathcal{N}) deux espaces mesurables.

1. Montrer que $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ est la plus petite tribu sur $X_1 \times X_2$ qui rende mesurables les projections canoniques

$$\pi_1 : \begin{cases} X_1 \times X_2 & \rightarrow & X_1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi_2 : \begin{cases} X_1 \times X_2 & \rightarrow & X_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{cases}$$

2. Soient (Z, \mathcal{T}) un espace mesurable et f une fonction de (Z, \mathcal{T}) dans $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$. Montrer que f est mesurable si et seulement si $\pi_1 \circ f : (Z, \mathcal{M}) \rightarrow (X, \mathcal{M})$ et $\pi_2 \circ f : (Z, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{N})$ le sont.

Exercice 84. Soient X_1 et X_2 deux espaces topologiques, munis de leurs tribus boréliennes.

1. Montrer que $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) \subset \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$.
2. Montrer que si X_1 et X_2 sont des espaces métriques séparables, alors $\mathcal{B}(X_1) \otimes \mathcal{B}(X_2) = \mathcal{B}(X_1 \times X_2)$.

Exercice 85. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures σ -finies non nulles sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) = 0,$$

où on a noté $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont tels que $\mu_1(A_1) > 0$ et $\mu_2(A_2) > 0$ alors $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.
3. En ré-écrivant l'égalité $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) = 0$, montrer que pour μ_1 -presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mu_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$.
4. En déduire qu'il existe $a_2 \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 > 0$ tels que $\mu_2 = \alpha_2 \delta_{a_2}$.
5. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in]0, +\infty[$ tels que $\mu_1 = \alpha_1 \delta_a$ et $\mu_2 = \alpha_2 \delta_a$.

Exercice 86. Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens de \mathbb{R}^2 et calculer leurs mesures de Lebesgue.

- (i) $T = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \leq 1\}$.
- (ii) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$.
- (iii) Le disque de centre 0 et de rayon 1.
- (iv) Le disque de centre $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$.

(v) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq e^{-|y|}\}$.

Exercice 87. Pour $(x, y) \in [0, 1]^2$ on pose

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que cela définit une fonction borélienne de $[0, 1]^2$ dans \mathbb{R} .

2. Calculer (en justifiant)

$$\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 f(x, y) dy \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

Indication : on pourra dériver par rapport à y l'expression $y/(x^2 + y^2)$.

3. Commenter.

Exercice 88 (Intégrales sur des rectangles). Après en avoir justifié l'existence, calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{[-1,1] \times [1,2]} \frac{x^2}{y} dx dy, \quad I_2 = \int_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \sin(x + y) dx dy,$$

$$I_3 = \int_{[3,7] \times [-2,2]} \frac{x}{\sqrt{1 + xy + x^2}} dx dy.$$

Exercice 89. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Calculer

$$I_1 = \int_D 1 dx dy, \quad I_2 = \int_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad I_3 = \int_D xy(x + y) dx dy.$$

Exercice 90. Calculer $\iint_D f(x, y) dx dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x, y) = x + y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \geq x \geq 0, x^2 \leq y \leq x\},$
2. $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^3}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 > x > 1, y > 2, x + y < 5\},$
3. $f(x, y) = \cos(xy), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \geq x \geq 1, 0 \leq xy \leq 2\},$
4. $f(x, y) = x, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\},$
5. $f(x, y) = xy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy + x + y \leq 1\}.$

Exercice 91. Calculer l'intégrale de la fonction $(x, y) \mapsto e^{x+y}$ sur le domaine

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| < 1, |x - y| < 1\}.$$

Exercice 92. Calculer les aires des domaines suivants :

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, -\sin(x) \leq y \leq \sin(x)\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, y \leq -x^2 + 2x + 1\}.$$

Exercice 93. On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in [0, 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$. Calculer

$$I = \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Exercice 94. Calculer

$$\iiint_D x dx dy dz, \quad \text{où } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Exercice 95. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

3. Vérifier que f est mesurable à valeurs positives. Calculer $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$.

E.10 Changements de variables

Exercice 96. En passant aux coordonnées polaires, calculer l'aire du domaine

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 3 \text{ et } y > 0 \right\}$$

(et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu).

Exercice 97. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Exercice 98. Calculer $\iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$, où on a noté $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Exercice 99. On considère le domaine D borné délimité par les droites d'équations $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$. Calculer l'intégrale $\iint_D (x + y) dx dy$

1. par calcul direct,
2. en effectuant le changement de variable $(u, v) = (x + y, x - y)$.

Exercice 100. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

Exercice 101. Calculer $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ dans les cas suivants :

1. $f(x, y, z) = \cos x$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,
2. $f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$.

Exercice 102. Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x, y) \mapsto (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$ sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\}$, où $b > a > 0$. On pourra effectuer le changement de variables $u = xy$, $v = y^2 - x^2$.

Exercice 103. Soit D un domaine de \mathbb{R}^2 . On rappelle que le *centre de gravité* de D est le point $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$ défini par

$$(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \left(\iint_D x dx dy, \iint_D y dx dy \right).$$

1. Déterminer le centre de gravité du disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le trapèze $D_k \subset \mathbb{R}^2$ de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, k)$. Déterminer le centre de gravité (x_G, y_G) de D_k .
3. Considérons l'application affine $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, définie par

$$\varphi(x, y) = (x + 3y, x - y) + (2, 3).$$

Soit (x'_G, y'_G) le centre de gravité du domaine $\varphi(D)$. Montrer que $(x'_G, y'_G) = \varphi(x_G, y_G)$.

4. Plus généralement, montrer que pour toute application affine (invertible) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, le centre de gravité de $\varphi(D)$ est $\varphi(x_G, y_G)$.
5. Dédurre de la question précédente que si D est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées alors son centre de gravité est l'origine.

Exercice 104. Soient a et b des réels positifs. On définit le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leq 1\}$.

1. Calculer $\iint_D (2x^3 - y) dx dy$.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité de D .

Exercice 105. Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Calculer le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ d'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} < 1.$$

E.11 Espaces de Lebesgue

Exercice 106. Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et (Y, \mathcal{N}) un espace mesurable. On note \mathcal{F} l'ensemble des fonctions mesurables de X dans Y et on considère sur \mathcal{F} la relation \mathcal{R} définie par

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, \quad f \mathcal{R} g \iff f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x \in X.$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathcal{F} .

Exercice 107. A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, \infty]$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle dans $L^p(]0, 1[)$? Dans $L^p([0, 1])$? Dans $L^p(]1, \infty[)$? Dans $L^p([1, \infty])$?

Exercice 108. Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $\lambda > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'application Θ_λ qui à $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ associe

$$\Theta_\lambda u : x \mapsto \alpha u(\lambda x).$$

1. Montrer que Θ_λ définit bien une application de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

2. Déterminer α pour que Θ_λ soit une isométrie de $L^p(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire que $\|\Theta_\lambda u\|_p = \|u\|_p$ pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$).

Exercice 109. On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a . Soit $\alpha > 0$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on note

$$\mu(A) = \alpha \int_{[0,1] \cap A} e^{-\alpha x} d\lambda(x) + e^{-\alpha} \delta_1(A)$$

et

$$\nu(A) = \int_{[0,+\infty[\cap A} e^{-\alpha x} d\lambda(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \delta_k(A).$$

1. a. Montrer que μ et ν sont des mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

b. Sont-elles finies?

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = x$ et $g(x) = e^{\alpha x}$.

a. Montrer que f et g sont mesurables.

b. Sont-elles intégrables par rapports à μ ? par rapport à ν ? Si oui, calculer leurs intégrales.

Exercice 110. Dans le chapitre sur les espaces de Lebesgue, où a-t-on utilisé le fait que $p \geq 1$?

Exercice 111. Soit $p \in [1, +\infty[$.

1. Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle.

2. Montrer qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

3. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ est uniformément continue alors elle tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 112. Soit f une fonction mesurable de (X, \mathcal{M}, μ) dans \mathbb{R} . Montrer que

$$\|f\|_\infty = \sup_{\substack{A \in \mathcal{M} \\ \mu(A) > 0}} \inf_{x \in A} |f(x)|.$$

Exercice 113. Soit $p \in [1, +\infty]$. On note

$$\Omega_p = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \mid f \geq 0 \text{ p.p.}\}.$$

Montrer que Ω_p est d'intérieur vide dans $L^p(\mathbb{R})$ pour $p < +\infty$ et d'intérieur non vide si $p = +\infty$. *Indication : on pourra commencer par montrer qu'une fonction $f \in \Omega_p$ bornée n'est pas dans l'intérieur de Ω_p si $p < +\infty$.*

Exercice 114. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Montrer que pour $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $h \in L^r(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fgh \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et

$$\|fgh\|_{L^1(X, \mathcal{M}, \mu)} \leq \|f\|_{L^p(X, \mathcal{M}, \mu)} \|g\|_{L^q(X, \mathcal{M}, \mu)} \|h\|_{L^r(X, \mathcal{M}, \mu)}.$$

Exercice 115. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que

$$\forall \phi \in C_c^0(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} f \phi d\lambda = 0.$$

Montrer que $f = 0$ p.p. (la question peut être traitée directement dans le cas général, mais on peut procéder par étapes en considérant successivement les cas où f est elle-même continue à support compact, où $f \in L^2$, où $f \in L^1$ et enfin le cas général).

Exercice 116. Soit (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^1(X, \mathcal{M}, \mu) \cap L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$. On suppose que cette suite est bornée dans $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ et converge dans $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ vers une fonction f . Montrer que f_n converge vers f dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 117 (Inégalité de Hardy). Soient $p \in]1, \infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Pour $x > 0$ on note

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

On cherche à montrer l'inégalité de Hardy

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p.$$

1. Montrer que $F(x)$ est bien défini pour tout $x > 0$.
2. On suppose que f est continue à support compact dans \mathbb{R}_+^* et à valeurs positives.
 - a. Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$F(x) = -xF'(x) + f(x).$$

- b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $A > 0$ on a

$$\frac{p-1}{p} \int_0^A F(x)^p dx \leq \int_0^A F(x)^{p-1} f(x) dx.$$

- c. Montrer l'inégalité de Hardy pour f continue à valeurs positives.
 3. En déduire l'inégalité de Hardy pour f continue à support compact dans \mathbb{R}_+^* .
 4. En déduire l'inégalité de Hardy dans le cas général.
 5. Montrer que la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale (on pourra par exemple considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \mapsto x^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{[1, n]}(x)$).
 6. Examiner les cas $p = 1$ et $p = \infty$.

Exercice 118. Soit $p \in [1, \infty[$.

1. Donner une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ qui converge simplement presque partout vers une fonction g mais qui ne converge pas vers g dans L^p .
2. Donner une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ qui converge dans L^p vers une fonction f mais qui ne converge pas simplement presque partout vers f .
3. Montrer que si une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ converge dans $L^p(\mathbb{R})$ vers une fonction f et converge simplement presque partout vers une fonction g , alors $f = g$ presque partout.