Chapitre 5

Espaces de Lebesgue

Ce chapitre marque un tournant dans l'étude des propriétés de l'intégrale. Jusqu'à présent, on s'intéressait surtout à l'intégrale d'une fonction particulière. Peut-on donner un sens à l'intégrale de cette fonction ? peut-on en donner la valeur ? etc. Tout au plus, on a considéré des familles de fonctions dépendant d'un paramètre, et on a regardé la dépendance de l'intégrale par rapport à ce paramètre.

Dans ce chapitre le point de vue commence à changer. On s'intéresse aux propriétés de l'espace des fonctions intégrables dans sa globalité. C'est le point de départ de ce qu'on appelle l'analyse fonctionnelle. On va montrer ici qu'on peut utiliser l'intégrale pour définir une distance entre les fonctions. Pour cela, on repart simplement de l'interprétation initiale de l'intégrale comme « aire sous la courbe ». En effet, on tentera de définir la norme d'une fonction intégrable f par l'intégrale de $|f|$, c'est-à-dire l'aire délimitée par la courbe de f et « l'axe des abscisses ». Plus généralement, la distance entre deux fonctions sera l'aire délimitée par les courbes des deux fonctions.

On a dû introduire une nouvelle intégrale, mais ce travail va commencer à vraiment payer, puisque l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue lui-même héritera des bonnes propriétés de l'intégrale. Mais, car il y a toujours un mais, il va falloir encore travailler un peu et faire quelques concessions pour obtenir effectivement ces bonnes propriétés.

On va également introduire dès le premier paragraphe des variantes. On constatera par exemple par la suite que l'espace des fonctions de carré intégrable est encore plus agréable que l'espace des fonctions intégrables lui-même. Toutes ces bonnes propriétés (qu'il faudra encore compléter dans des cours ultérieurs) fourniront les cadres de travail adéquats pour beaucoup de problèmes d'analyse.

5.1 Les Espaces de Lebesgue $\mathcal{L}^p$

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. En plus de l'espace des fonctions intégrables, qu'on avait noté $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $\mathcal{L}^1(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), on introduit les espaces suivants :

Définition 5.1. Soit $p \in [1, +\infty[$. Étant donnée une fonction f mesurable de X dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), on note

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \in [0, +\infty].$$

Pour $p \in [1, +\infty]$ on note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ (ou $\mathcal{L}^p(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_p < +\infty.$$

Il est difficile d'anticiper l'intérêt d'une telle définition, mais au moins elle n'est pas très compliquée. On s'intéresse à l'intégrabilité de $|f|^p$ plutôt qu'à celle de $|f|$. Pourquoi pas...

Attention à la calligraphie ! Le $\mathcal{L}$ (« L rond », qui en écriture manuscrite ressemble plutôt à $\mathscr{L}$) ne doit pas être confondu avec un L droit tel qu'il apparaîtra un peu plus loin.

Exemple 5.2. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $\alpha > 0$.

(i) Pour $x \geqslant 1$ on pose $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors f_α appartient à $\mathcal{L}^p([1,+\infty[)$ si et seulement si $\alpha p > 1$.

(ii) Pour $x \in]0,1]$ on pose $g_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors g_α appartient à $\mathcal{L}^p(]0,1])$ si et seulement si $\alpha p < 1$.

(iii) Pour $x > 0$ on pose $h_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Alors h_α n'appartient pas à $\mathcal{L}^p(]0,+\infty[)$.

Définition 5.3. Pour $p \in [1,\infty]$ on note $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace $\mathcal{L}^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Pour $p \in [1,+\infty[$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a alors

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On utilise des notations analogues sur $\mathbb{Z}$ ou encore $\mathbb{N}^*$.

Définition 5.4. Étant donnée une fonction f mesurable de X dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), on note [1]

$$\|f\|_\infty = \inf\{\rho \geqslant 0 \mid |f| \leqslant \rho \text{ presque partout}\} \quad \in [0,+\infty].$$

On note $\mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{M},\mu)$ (ou $\mathcal{L}^\infty(X)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_\infty < +\infty.$$

On dit alors que f est essentiellement bornée.

Lorsque la mesure μ est telle que $\emptyset$ est le seul ensemble de mesure nulle, les fonctions essentiellement bornées sont exactement les fonctions bornées, et dans ce cas, $\|f\|_\infty$ est simplement la borne supérieure de $|f|$. C'est par exemple le cas pour les suites. On définit comme précédemment $\ell^\infty(\mathbb{N})$, et pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a simplement

$$\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Dans le cas général, le « sup essentiel » $\|f\|_\infty$ est la borne supérieure de $|f|$ à un ensemble de mesure nulle près. On autorise $|f|$ à dépasser $\|f\|_\infty$ sur un ensemble négligeable. En particulier, une fonction est essentiellement bornée si elle coïncide presque partout avec une fonction bornée.

Exemple 5.5. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$. Étant donné $\rho \geqslant 0$, on a $|\mathbb{1}_\mathbb{Q}| \leqslant \rho$ presque partout, du fait que $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle. Cela prouve que

$$\|\mathbb{1}_\mathbb{Q}\|_\infty = 0.$$

On conclut de la même façon en considérant la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

qui n'est pourtant pas bornée.

Pour $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ la situation est différente. En effet, puisque $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est pas de mesure nulle, on a bien $\left|\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right| \leqslant \rho$ presque partout (en fait, partout) pour tout $\rho \geqslant 1$, mais ce n'est plus le cas pour $\rho \in [0,1[$. En prenant l'infimum des ρ qui conviennent, on obtient que

$$\left\|\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}\right\|_\infty = 1.$$

Proposition 5.6. *Soit $f \in \mathcal{L}^\infty(X,\mathcal{M},\mu)$. Alors pour presque tout $x \in X$ on a $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$.*

1. Il est sous-entendu qu'on pose $\|f\|_\infty = +\infty$ dans le cas où aucun $\rho \geqslant 0$ n'est tel que $|f| \leqslant \rho$ presque partout.

On utilisera souvent cette proposition. En première lecture on ne voit pas forcément immédiatement la différence avec la définition même de $\|f\|_\infty$. Il s'agit ici de la subtile différence entre minimum et borne inférieure. On a définit $\|f\|_\infty$ comme étant la borne inférieure de l'ensemble des ρ vérifiant la propriété « $|f| \leqslant \rho$ presque partout ». Mais cela n'implique pas a priori que la propriété est vérifiée pour $\rho = \|f\|_\infty$. La proposition assure que c'est bien le cas, ce qui signifie qu'on peut en fait écrire

$$\|f\|_\infty = \min \{\rho \geqslant 0 \mid |f| \leqslant \rho \text{ presque partout}\}.$$

Démonstration. Le résultat est clair si $\|f\|_\infty = +\infty$. On suppose maintenant que f est essentiellement bornée. Pour $\rho \geqslant 0$ on note

$$A_\rho = \{x \in X \mid |f(x)| > \rho\}$$

C'est une partie mesurable de X, comme image réciproque de l'ouvert $]\rho, +\infty[$ par la fonction mesurable $|f|$. Soit $\rho > \|f\|_\infty$. Par définition de $\|f\|_\infty$, il existe $\tilde{\rho} \leqslant \rho$ tel que $\mu(A_{\tilde{\rho}}) = 0$. Puisque $A_\rho \subset A_{\tilde{\rho}}$, on a également $\mu(A_\rho) = 0$. Ainsi[2] A_ρ est de mesure nulle pour tout $\rho > \|f\|_\infty$. On observe ensuite que

$$A_{\|f\|_\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{\|f\|_\infty + \frac{1}{n}}.$$

Puisque $A_{\|f\|_\infty + \frac{1}{n}}$ est de mesure nulle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cela prouve que $\mu(A_{\|f\|_\infty}) = 0$. Autrement dit, on a bien $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle. □

Contrairement à ce que la notation suggère, les applications $\|\cdot\|_p$ pour $p \in [1, +\infty]$ ne sont en général pas des normes sur $\mathcal{L}^p(X)$! En effet, si f est une fonction mesurable sur X qui est nulle presque partout mais pas partout, alors on a

$$f \neq 0 \quad \text{et} \quad \|f\|_p = 0.$$

Cela contredit évidemment la définition d'une norme. C'est pénible.

On avait promis que cette nouvelle intégrale donnerait de bonnes propriétés pour les espaces de fonctions intégrables, et au final ce qui serait une norme naturelle n'est même pas une norme. Avec les fonctions continues, cette norme $\|\cdot\|_1$ ne définissait pas un espace complet, mais au moins c'était une norme.

Patience, le problème n'est pas si grave. On a déjà pris l'habitude d'oublier ce qui se passe sur un ensemble de mesure nulle. On va continuer de le faire, mais en toute rigueur, évidemment.

5.2 Inégalité de Hölder

Avant de s'attaquer à résoudre les problèmes des définitions précédentes, on va commencer par recenser ce qui fonctionne bien. On montre dans ce paragraphe que les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ sont des espaces vectoriels et que les applications $\|\cdot\|_p$ (puisqu'on ne peut pas parler de normes) vérifient sur $\mathcal{L}^p(X)$ l'inégalité triangulaire (notez que l'homogénéité est évidente). Ces propriétés sont déjà connues pour $p = 1$ et $p = +\infty$, mais elles ne sont pas triviales en général (on pourra se rappeler qu'il n'est déjà pas évident de vérifier que la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ vérifie bien l'inégalité triangulaire).

Pour cela, on va commencer par montrer l'inégalité de Hölder, qui sera extrêmement importante pour travailler dans les espaces $\mathcal{L}^p(X)$. On sait que le produit de deux fonctions intégrables n'est en général pas intégrable. Et même quand c'est le cas, on ne peut pas écrire des attrocités telles que « l'intégrale d'un produit est inférieure (ou pire, égale) au produit des intégrales » ! De même, les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ ne sont pas stables par produit (à part pour $p = +\infty$).

Par contre, le produit fg d'une fonction intégrable f et d'une fonction bornée g est intégrable, et son intégrale est inférieure ou égale au produit de l'intégrale de f et de la borne supérieure de g. En élargissant notre étude à tous les espaces $\mathcal{L}^p(X)$, on va pouvoir considérer des produits de fonctions de façon plus générale.

2. Attention, c'est à nouveau une propriété qui n'est pas directement donnée par la définition de $\|f\|_\infty$.

Définition 5.7. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. On dit que p et q sont des **exposants conjugués** si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(avec la convention naturelle $1/\infty = 0$).

Exemple 5.8. On note que 1 et $+\infty$ sont conjugués, tandis que 2 est conjugué à lui-même. Par exemple, l'exposant conjugué de 3 et $\frac{3}{2}$. Plus généralement, un exposant $p \in]1, 2[$ est toujours conjugué à un exposant $q \in]2, +\infty[$, et inversement.

Théorème 5.9 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués. Soient f et g deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q \, . \tag{5.1}$$

En particulier, pour $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fg \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Avec ce résultat, on commence à comprendre l'intérêt d'avoir introduit tous ces espaces $\mathcal{L}^p(X)$. On a là toute une famille de conditions suffisantes pour que le produit de deux fonctions soit intégrable. On n'ira pas beaucoup plus loin dans cette direction ici, mais il y a tout un tas d'autres résultats de ce genre où les espaces $\mathcal{L}^p(X)$, qui ne sont a priori pas très naturels, interviennent pour obtenir des conclusions très utiles. Et ce n'est qu'un aperçu de l'intérêt de ces espaces.

Démonstration. • Le produit fg est bien mesurable comme produit de deux fonctions mesurables. On commence par observer que la deuxième conclusion de la proposition est conséquence de la première. En effet, si f et g sont dans $\mathcal{L}^p(X)$ et $\mathcal{L}^q(X)$ respectivement, alors le produit $\|f\|_p \, \|g\|_q$ est fini, et (5.1) implique donc que fg est intégrable. Il suffit donc de montrer (5.1). Si f ou g est presque partout nulle, c'est également le cas pour le produit fg. Dans ce cas le membre de gauche dans (5.1) est nul, donc l'inégalité est bien vérifiée. On suppose maintenant que f et g ne sont pas presque partout nulles. Enfin, si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_q = +\infty$, alors l'inégalité est encore automatiquement vraie. On peut donc maintenant supposer que ce n'est pas le cas.

• On suppose que $p = 1$ et $q = \infty$ (le cas $p = \infty$, $q = 1$, est analogue). Comme $|(fg)(x)| \leqslant |f(x)| \, \|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in X$ on a bien

$$\int_X |fg| \, d\mu \leqslant \|g\|_\infty \int_X |f| \, d\mu.$$

• On considère maintenant le cas $p, q \in]1, \infty[$. Pour $x \in X$ on note

$$F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}.$$

D'après l'inégalité de Young (Proposition 5.49) on a, pour tout $x \in X$,

$$|F(x)G(x)| \leqslant \frac{|F(x)|^p}{p} + \frac{|G(x)|^q}{q}.$$

Tous ces termes définissent des fonctions mesurables. Après intégration, on obtient

$$\frac{1}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \int_X |fg| \, d\mu = \int_X |FG| \, d\mu \leqslant \frac{1}{p} \int_X |F|^p \, d\mu + \frac{1}{q} \int_X |G|^q \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où le résultat. □

On peut de la même façon considérer un produit de plus de deux fonctions. Le corollaire suivant se montre par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ (l'écrire pour $m = 3$ en guise d'exercice).

Corollaire 5.10. *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \dots, p_m \in [1, \infty]$ tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1.$$

Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Alors on a

$$\int_X |f_1 \dots f_m| \, d\mu \leqslant \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}(X,\mathcal{M},\mu)}.$$

En particulier, si $f_1 \in \mathcal{L}^{p_1}(X, \mathcal{M}, \mu)$, ..., $f_m \in \mathcal{L}^{p_m}(X, \mathcal{M}, \mu)$, alors on a $f_1 \dots f_m \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{M}, \mu)$.

***Exercice* 1.** Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Montrer que pour toutes fonctions mesurables f et g de X dans $\mathbb{R}$ on a

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

En déduire que pour $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fg \in \mathcal{L}^r(X, \mathcal{M}, \mu)$.

5.3 Inégalité de Minkowski

Une première application de l'inégalité de Hölder est l'inégalité de Minkowski que l'on montre maintenant. Cette inégalité donne en particulier l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$.

Théorème 5.11 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soient $p \in [1, +\infty]$. Alors pour deux fonctions mesurables f et g on a*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{5.2}$$

En particulier, pour $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Démonstration. • Comme pour l'inégalité de Hölder, la seconde conclusion est conséquence de l'inégalité (5.2). On rappelle que la somme de deux fonctions mesurables est mesurable. En outre, l'inégalité (5.2) est claire si $\|f\|_p = +\infty$ ou $\|g\|_p = +\infty$. On suppose donc que f et g sont dans $\mathcal{L}^p(X)$. Enfin, puisque $|f + g| \leqslant |f| + |g|$, le résultat est clair pour $p = 1$ et $p = +\infty$.

• On suppose maintenant que $p \in]1, +\infty[$. Puisque

$$\|f + g\|_p \leqslant \||f| + |g|\|_p$$

et

$$\| \, |f| \, \|_p + \| \, |g| \, \|_p = \|f\|_p + \|g\|_p,$$

il suffit de considérer le cas où f et g sont à valeurs positives.

• Par convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}_+$ on a, pour tout $x \in X$,

$$\left(\frac{f(x) + g(x)}{2} \right)^p \leqslant \frac{f(x)^p + g(x)^p}{2}.$$

Ou encore

$$\big(f(x) + g(x)\big)^p \leqslant 2^{p-1}\big(f(x)^p + g(x)^p\big).$$

Cela prouve que $f+g$ est dans $\mathcal{L}^p(X)$. On note $h = f+g$. Si $\|h\|_p = 0$ l'inégalité de Minkowski est claire. On suppose donc que $\|h\|_p > 0$. On note $q = \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué de p. On a alors

$$\left\|h^{p-1}\right\|_q = \left(\int_X h^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X h^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|h\|_p^{p-1} < +\infty.$$

Par l'inégralité triangulaire dans $\mathcal{L}^1(X)$ puis l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}\|h\|_p^p = \|h^p\|_1 = \left\|fh^{p-1} + gh^{p-1}\right\|_1 &\leqslant \left\|fh^{p-1}\right\|_1 + \left\|gh^{p-1}\right\|_1 \\ &\leqslant \|f\|_p \left\|h^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p \left\|h^{p-1}\right\|_q \\ &\leqslant \big(\|f\|_p + \|g\|_p \big) \|h\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

On obtient le résultat en simplifiant par $\|h\|_p^{p-1}$. □

Pour $p \in [1, +\infty]$, il est facile de voir que pour $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\lambda \in \mathbb{C}$) on a $\|f\|_p \geqslant 0$ et $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, et on vient de vérifier l'inégalité triangulaire. Ainsi, le problème de définie positivité évoqué au paragraphe précédent est le seul problème pour avoir une norme. On parle alors de semi-norme.

Proposition 5.12. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Alors $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace vectoriel et l'application*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) & \to & [0, +\infty[\\ f & \mapsto & \|f\|_p \end{array} \right.$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

5.4 Les Espaces de Lebesgue L^p

On a vu aux deux paragraphes précédents que les espaces de Lebesgue $\mathcal{L}^p(X)$, munis des applications $\|\cdot\|_p$, sont quasiment des espaces vectoriels normés. Le seul problème est que deux fonctions égales presque partout sont considérées comme étant à distance nulle, alors qu'elles ne sont pas nécessairement égales.

Une façon de s'en sortir est de considérer que deux fonctions presque partout égales sont en fait plus ou moins égales. Après tout, dès lors qu'il est question d'intégration, deux fonctions égales presque partout se comportent exactement de la même façon, donc on ne perd pas grand chose à les confondre [3].

Bien entendu, on ne peut pas décréter que deux fonctions différentes sont égales. Si on veut masquer la distinction entre deux fonctions presque partout égales et les identifier, le moyen rigoureux de procéder est de passer au quotient par rapport à cette relation d'égalité presque partout.

Définition 5.13. On considère sur l'espace des fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par

$$f \,\mathcal{R}\, g \quad \iff \quad f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x \in X.$$

On note alors $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'espace obtenu en quotientant $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Autrement dit, un élément de $L^p(X)$ est une classe d'équivalence d'éléments de $\mathcal{L}^p(X)$. Ce ne sont plus à proprement parler des fonctions. Par commodité on fera l'abus de notation de parler de fonctions de $L^p(X)$. Cela signifie qu'on parle en fait de n'importe quelle fonction dans une classe d'équivalence. Quand on donne une propriété d'une fonction de $L^p(X)$, il faut donc qu'elle soit valable pour n'importe quel représentant de la classe d'équivalence. Cela fonctionne avec l'intégrale. Les fonctions d'une même classe d'équivalence sont soit toutes intégrables, soit aucune ne l'est. Et si elles sont toutes intégrables, alors elles sont toutes la même intégrale. On peut donc parler de l'intégrale d'un élément de $L^1(X)$.

Plus généralement, si f et g sont égales presque partout, alors on a $\|f\|_p = \|g\|_p$, donc si on note $[f]$ ou $[g]$ la classe d'équivalence commune de f et g on peut poser

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p .$$

La définition est bien licite car elle ne dépend pas du choix d'un représentant. On définit ainsi une application de $L^p(X)$ dans $\mathbb{R}_+$. On définit de la même façon la somme de deux éléments de $L^p(X)$, et la multiplication d'un élément de $L^p(X)$ et d'un scalaire. On vérifie que cela donne à $L^p(X)$ attendue :

3. En fait cela posera quand même des difficultés, mais tant pis, on s'adaptera le moment venu.

Proposition 5.14. *L'espace $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ hérite de la stucture de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et de la semi-norme $\|\cdot\|_p$, qui est en fait une norme.*

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^p(X)$ tels que $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p. Alors on a $f_1 + g_1 = f_2 + g_2$ p.p. et $\lambda f_1 = \lambda f_2$ p.p. Ainsi, si on note $[f], [g] \in L^p(X)$ les classes d'équivalence des fonctions $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$ on peut définir

$$[f] + [g] = [f + g], \quad \text{et} \quad \lambda[f] = [\lambda f].$$

On vérifie que cela munit $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De même, la semi-norme $\|\cdot\|_p$ définit une semi-norme sur $L^p(X)$. On obtient en fait une norme car si $\|[f]\|_p = 0$ on a $f = 0$ p.p. et donc $[f] = [0]$. ☐

Remarque 5.15 (Remarque très très très importante). Lorsque l'on parle d'une « fonction » f de $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, cela n'a pas de sens de parler de la valeur de f en un point, puisque f représente toute une famille de fonctions qui n'ont pas la même valeur en ce point. Et ce n'est pas un problème qui ne se pose que sur un ensemble de mesure nulle. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ il existe deux représentants de f qui prennent des valeurs différentes en x_0, donc on ne peut pas parler de $f(x_0)$. C'est là toute la difficulté de travailler dans les espaces $L^p(X)$. On doit manipuler des « fonctions » sans plus jamais parler de la valeur de ces fonctions en un point. C'est complètement contraire à la définition mathématique d'une fonction, selon laquelle à tout élément de l'ensemble de départ on peut associer un unique élément de l'ensemble d'arrivée. C'est la mauvaise nouvelle de ce chapitre.

Pour l'inégalité de Hölder aucun problème, elle ne fait intervenir que des intégrales et passe sans aucune difficulté au quotient (à vérifier en exercice, pour vous assurer que vous avez bien compris ce que signifie ce passage au quotient).

Théorème 5.16 (Inégalité de Hölder, le retour)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugés. Alors pour $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fg \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

Le chemin a été long et tortueux, mais nous voilà enfin arrivés là où nous voulions en venir ! Nous pouvons maintenant montrer que nous avons construit un espace complet de « fonctions » intégrables. Plus généralement, on montre que tous les espaces $L^p(X)$ sont complets. On commence par le cas $p = +\infty$ qui est le plus simple.

Proposition 5.17. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$. Alors il existe $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle que f_n converge vers f simplement presque partout* et *dans $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

Démonstration. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ on note

$$A_n = \{x \in X \mid |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$$

et

$$B_{n,m} = \{x \in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\} .$$

Ces ensembles sont mesurables de mesures nulles, donc si on note

$$E = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m} \right),$$

on a également $E \in \mathcal{M}$ et $\mu(E) = 0$. Soit $x \in X \setminus E$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ on a

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n,m\to 0]{} 0.$$

Ainsi la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, qu'on note $f(x)$. Pour $x \in E$ on pose $f(x) = 0$. Par définition, f_n converge donc simplement presque partout vers f. En outre, la fonction f ainsi définie est mesurable et pour tout $x \in X$ on a

$$|f(x)| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} |f_n(x)| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty .$$

Puisque la suite $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, cela prouve que $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$. De même, on a aussi

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty ,$$

donc

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \liminf_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Cela conclut la démonstration. □

On sait qu'une suite réelle ou complexe absolument convergente est convergente. C'est une conséquence de la complétude de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$. Ainsi, pour $p = +\infty$, la proposition suivante est directement conséquence de la précédente. Pour $p < +\infty$ on fait le cheminement inverse. On va d'abord montrer ce résultat pour en déduire ensuite la complétude de $L^p(X)$.

Proposition 5.18. *Soient $p \in [1, +\infty]$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_p < +\infty.$$

Alors il existe $g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ telle que pour presque tout $x \in X$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g_n(x)|$ est convergente et

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x).$$

En outre on a

$$\|g\|_p \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_p . \tag{5.3}$$

Démonstration. Pour $x \in X$ on pose

$$G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k(x)| .$$

Cela définit une fonction mesurable de X dans $[0, +\infty]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose également

$$G_n = \sum_{k=0}^{n} |g_k| .$$

Ainsi G_n est mesurable de X dans $\mathbb{R}_+$ et converge simplement vers G. Par l'inégalité de Minkowski on a $G_n \in \mathcal{L}^p(X)$ et [4]

$$\|G_n\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|g_k\|_p .$$

Par le lemme de Fatou on a alors

$$\int_X G^p \, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} G_n^p \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_X G_n^p \, d\mu = \liminf_{n\to+\infty} \|G_n\|_p^p \leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \|g_k\|_p \right)^p .$$

Cela prouve que $G \in \mathcal{L}^p(X)$ et

$$\|G\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \|g_k\|_p .$$

En particulier, cela prouve que G est presque partout finie. Ainsi il existe $E \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(E) = 0$ et $G(x) < +\infty$ pour tout $x \in X \setminus E$.

- Pour $x \in X \setminus E$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ est donc convergente. On peut alors définir

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) & \text{si } x \in X \setminus E, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

4. Attention, à ce stade on ne peut pas dire que G est dans $\mathcal{L}^p(X)$!

En particulier g est mesurable et $|g| \leqslant G$, ce qui assure que $g \in \mathcal{L}^p(X)$ et donne (5.3). Pour $n \in \mathbb{N}$ on a aussi

$$\left| g - \sum_{k=0}^{n} g_k \right| \leqslant G.$$

Comme G^p est intégrable et $\sum_{k=0}^{n} g_k$ converge simplement presque partout vers g, on a par le théorème de convergence dominée

$$\left\| g - \sum_{k=0}^{n} g_k \right\|_p^p = \int_X \left| g - \sum_{k=0}^{n} g_k \right|^p d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela prouve que $\sum_{k=0}^{n} g_k$ converge vers g dans $\mathcal{L}^p(X)$, ce qui conclut la démonstration. □

Avant d'énoncer la complétude des espaces $L^p(X)$, on montre le résultat suivant qui a son intérêt propre.

Proposition 5.19. *Soient $p \in [1, +\infty[$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$. Alors il existe $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante tels que la sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers f simplement presque partout et dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.*

Démonstration. On construit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ une suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $j, m \geqslant n_k$ on a

$$\|f_j - f_m\|_p \leqslant 2^{-k}.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leqslant 2^{-k}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$, de sorte que

$$f_{n_k} = f_{n_0} + \sum_{j=0}^{k-1} g_j.$$

D'après la Proposition 5.18 il existe $f \in \mathcal{L}^p(X)$ telle que f_{n_k} converge presque partout et dans $\mathcal{L}^p(X)$ vers f. □

Remarque 5.20. On peut construire une suite de fonctions de $\mathcal{L}^p([0,1])$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{L}^p([0,1])$ mais qui ne converge ponctuellement en aucun point. Comme exemple on peut considérer les indicatrices des intervalles

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

avec $n \in \mathbb{N}$:

$$[0,1], [0,1/2], [1/2,1], [0,1/3], [1/3,2/3], [2/3,1], [0,1/4], \ldots$$

Par contre, ce que dit en particulier la Proposition 5.19 est que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{L}^p(X)$ converge simplement presque partout vers une fonction f *et* converge dans $\mathcal{L}^p(X)$ vers une fonction g, alors on a nécessairement $f = g$.

On a maintenant démontré tous les ingrédients nécessaires pour affirmer les espaces $L^p(X)$ sont complets.

Théorème 5.21 (Théorème de Riesz-Fisher)**.** *Soit $p \in [1, +\infty]$. L'espace de Lebesgue $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, muni de la norme $\|\cdot\|_p$, est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet).*

Démonstration. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère un représentant $\tilde{f}_n$ de f_n dans $\mathcal{L}^p(X)$. Alors il existe $\tilde{f} \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ tel que

$$\|\tilde{f}_n - \tilde{f}\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En effet, si $p = +\infty$, cela résulte de la Proposition 5.17. Si $p \in [1, +\infty[$ il existe d'après la Proposition 5.19 une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{L}^p(X)$ vers une certaine fonction f, et de façon générale une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente. Notant alors $f \in L^p(X)$ la classe d'équivalence de $\tilde{f}$, on a

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où le résultat. □

On a montré que les espaces $L^p(X)$ sont des espaces de Banach, ce qui est déjà une structure très agréable pour faire de l'analyse. Il y a un cas particulier pour lequel on peut aller plus loin.

Corollaire 5.22. *L'espace de Lebesgue $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par*

$$\forall f, g \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu), \quad \langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu.$$

Bien entendu, pour cette définition, on a identifié f et g à des représentants dans $\mathcal{L}^2(X)$, et cette définition ne dépend pas du choix de tels représentants.

Cette structure particulière pour le cas $p = 2$ explique que l'espace $L^2(X)$ est si important en pratique, finalement plus que l'espace $\mathcal{L}^1(X)$ qui semblait a priori plus naturel.

Remarque 5.23. En général, si $p \in [1, +\infty] \setminus \{2\}$, alors la norme $\|\cdot\|_p$ n'est associée à aucun produit scalaire, et donc $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ ne peut pas être vu comme un espace de Hilbert. Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, il suffit pour s'en convaincre d'essayer d'appliquer l'identité du parallèlogramme

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\big(\|f\|^2 + \|g\|^2\big)$$

avec les fonctions $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $g = \mathbb{1}_{[1,2]}$.

5.5 Inclusions entre espaces de Lebesgue

On discute dans ce paragraphe des liens entre les différents espaces de Lebesgue. On a deux espaces naturels, à savoir l'espace des fonctions intégrables $\mathcal{L}^1(X)$ (ou la version quotient $L^1(X)$) et l'espace des fonctions essentiellement bornées $\mathcal{L}^\infty(X)$ (ou le quotient $L^\infty(X)$). On a l'espace $\mathcal{L}^2(X)$ (ou le quotient $L^2(X)$) des fonctions de carré intégrable, qui jouera un rôle important du fait de sa structure d'espace de Hilbert. Et puis il y a tous les autres. Au final on se retrouve avec une infinité d'espaces, et même si la définition n'est pas très compliquée, il n'est pas si évident de bien les appréhender.

Un première question que l'on peut se poser est de savoir si on peut « ranger » ces espaces du plus petit au plus gros. Il est facile de voir à partir des exemples 5.2 ce n'est pas le cas. En effet, on peut faire les observations suivantes.

Exemple 5.24.
- la fonction $x \mapsto x^{-1}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ est dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ mais pas dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$,
- la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ est dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ mais elle n'est ni dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ ni dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$,
- la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{4}}\mathbb{1}_{]0,1]}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$ et dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ mais pas dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,
- la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+^*)$ mais elle n'est ni dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$ ni dans $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$,

De la même façon, pour tous $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p \neq q$ on peut construire des fonctions qui sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}_+^*)$ mais pas dans $\mathcal{L}^q(\mathbb{R}_+^*)$, et inversement.

Cette mise en garde était sans doute la partie la plus importante de ce paragraphe. Le deuxième objectif est de montrer qu'il y a tout de même quelques cas particuliers pour lesquels les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ forment une famille monotone par rapport à p au sens de l'inclusion. Mais dans quel sens, croissante ou décroissante ? Et bien les deux cas sont possibles !

Dans tous ce paragraphe, on énonce les résultats dans les espaces $L^p(X)$. Pour les preuves, on identifie un élément de $L^p(X)$ à un représentant dans $\mathcal{L}^p(X)$, et on vérifie et fur et à mesure des énoncés et des preuves que tout est indépendant du choix d'un représentant (c'est-à-dire qu'on ne change rien en remplaçant un représentant par une fonction qui lui est égale presque partout).

Le premier cas où on peut ordonner les espaces $L^p(X)$ concerne les mesures finies. Cela inclut donc la mesure de Lebesgue sur les segments de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement sur les compacts de $\mathbb{R}^d$), mais aussi toutes les mesures de probabilités.

Proposition 5.25. *On suppose que $\mu(X) < +\infty$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Si $p < q$ alors pour toute fonction f mesurable sur X on a*

$$\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q . \tag{5.4}$$

En particulier,

$$L^q(X, \mathcal{M}, \mu) \subset L^p(X, \mathcal{M}, \mu). \tag{5.5}$$

Attention au sens de l'inégalité (5.4), qui est opposé au sens de l'inclusion (5.5). Mais c'est cohérent, la norme de L^q est la plus grande, donc la condition pour être dans L^q est plus restrictive, donc L^q est plus petit que L^p.

En cas de doute sur le sens de ces inégalités/inclusions, il suffit de bien avoir en tête le cas extrême $p = 1, q = +\infty$, par exemple pour la mesure de Lebesgue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on sait déjà qu'une fonction essentiellement bornée sera intégrable, c'est-à-dire $\mathcal{L}^\infty([a, b]) \subset \mathcal{L}^1([a, b])$, et on a une borne sur l'intégrale en fonction de la borne essentielle :

$$\forall f \in \mathcal{L}^\infty([a, b]), \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f| \, d\lambda \leqslant (b - a) \|f\|_\infty .$$

Tout cela est bien entendu cohérent avec le résultat de la proposition 5.25.

Démonstration. • Il suffit de montrer (5.4) pour obtenir (5.5). En effet, pour $f \in \mathcal{L}^q(X)$ on a $\|f\|_q < +\infty$, donc (5.4) assure que $\|f\|_p < +\infty$, ce qui signifie que f est aussi dans $\mathcal{L}^p(X)$. Par passage au quotient, on obtient que $L^q(X)$ est inclus dans $L^p(X)$. Par ailleurs, l'inégalité (5.4) est claire si $\|f\|_q = +\infty$, donc il suffit de la montrer dans le cas où $f \in L^q(X)$. Pour la suite on choisit un représentant de f dans $\mathcal{L}^q(X)$ (que l'on note toujours f).
• Si $q = +\infty$ on a $|f| \leqslant \|f\|_\infty$ presque partout, donc

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \leqslant \int_X \|f\|_\infty^p \, d\mu = \mu(X) \|f\|_\infty^p .$$

Cela prouve que $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et en prenant la puissance $1/p$ dans cette inégalité on obtient bien (5.4).
• On suppose maintenant que $q < +\infty$. D'après l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{q}{p}$ et $\frac{q}{q-p}$ on a

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu \\
&\leqslant \left(\int_X |f|^q \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_X 1^{\frac{q}{q-p}} \, d\mu \right)^{1-\frac{p}{q}} \\
&\leqslant \mu(X)^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_q^p .
\end{aligned}$$

À nouveau, on conclut en prenant la puissance $1/p$ de cette inégalité. □

On introduit maintenant sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathbb{R}^d$) l'espace des fonctions localement intégrables, c'est-à-dire intégrables sur tout compact.

Définition 5.26. On note $\mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout compact K de $\mathbb{R}$ on a $f \mathbb{1}_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On note également $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ le quotient de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ par la relation d'égalité presque partout.

Puisque sur un compact K de $\mathbb{R}$ une fonction de L^p est intégrable, on a le résultat suivant.

Proposition 5.27. *Pour tout $p \in [1, +\infty]$ on a*

$$L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda).$$

On vient de décrire une situation où plus p est grand, plus l'espace $L^p(X)$ est petit. Il y a aussi des situations où plus p est grand, plus $L^p(X)$ est grand. Le cas typique est celui des suites, où de façon générale de tous les espaces munis d'une mesure de comptage.

On munit $\mathbb{N}$ de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et de la mesure de comptage μ. Considérons une suite réelle ou complexe $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dire que a est intégrable par rapport à μ est équivalent à dire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ est absolument convergente. Cela implique en particulier que a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la suite a est en particulier bornée. Ainsi $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$. Mais ce n'est pas tout. Lorsque $|a_n| < 1$, et c'est le cas pour n assez grand si $a \in \ell^1(\mathbb{N})$, alors on a $|a_n|^2 < |a_n|$. Cela implique que $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N})$. Et d'autre part, comme précédemment, si $a \in \ell^2(\mathbb{N})$, alors a_n tend vers 0 et donc $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Ainsi on a aussi $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 5.28. *Soient $p, q \in [1, +\infty[$. Si $p < q$ alors $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.*

La Proposition 5.28 est en fait un cas particulier de la proposition suivante, que l'on peut omettre.

Proposition 5.29. *On suppose qu'il existe $\mu_0 > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}$ on a $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) \geqslant \mu_0$. Soient $p, q \in [1, +\infty]$. Si $p < q$ alors pour toute fonction mesurable f sur X on a*

$$\|f\|_q \leqslant \mu_0^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_p ,$$

et en particulier

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{M}, \mu).$$

Démonstration. • Comme pour la Proposition 5.25, l'inégalité sur les normes implique l'inclusion entre espaces de Lebesgue, et il suffit de montrer l'inégalité pour $f \in \mathcal{L}^p(X)$. Enfin on note que l'hypothèse implique que $p < +\infty$.

• On considère d'abord le cas $q = +\infty$. Soit $M \geqslant 0$. On suppose qu'il existe $A \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f(x)| \geqslant M$ pour tout $x \in A$. Alors on a

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p \, d\mu \geqslant \int_A |f|^p \, d\mu \geqslant \mu_0 M^p,$$

d'où

$$M \leqslant \mu_0^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p .$$

Cela prouve que $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ et

$$\|f\|_\infty \leqslant \mu_0^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p .$$

• Si $q \in]p, +\infty[$ on peut alors écrire

$$\|f\|_q^q = \int_X |f|^q \, d\mu = \int_X |f|^p \, |f|^{q-p} \, d\mu \leqslant \|f\|_\infty^{q-p} \|f\|_p^p \leqslant \mu_0^{-\frac{q-p}{p}} \|f\|_p^q .$$

On conclut en prenant la puissance $1/q$ dans cette inégalité. □

On revient à un cadre général. Comme on l'a vu, il n'y a pas de relation d'inclusion entre les espaces $L^p(X)$ qui serait valable en toutes circonstances. Néanmoins, on observe que dans les exemples 5.24 on n'a pas donné d'exemple de fonction qui serait dans $\mathcal{L}^1(X)$ et dans $\mathcal{L}^\infty(X)$ mais pas dans $\mathcal{L}^2(X)$. Ce n'est pas un hasard, une fonction qui est à la fois dans $\mathcal{L}^1(X) \cap \mathcal{L}^\infty(X)$ est en fait automatiquement dans $\mathcal{L}^2(X)$. Pour le montrer on note

$$\mathcal{A}_- = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_+ = \{x \in X \mid |f(x)| > 1\} .$$

Ce sont des ensembles mesurables, et $\mathcal{A}_+$ est nécessairement de mesure finie. On a alors

$$\begin{aligned}\int_X |f|^2 \, d\mu &= \int_{\mathcal{A}_-} |f(x)|^2 \, d\mu(x) + \int_{\mathcal{A}^+} |f(x)|^2 \, d\mu(x) \\ &\leqslant \int_{\mathcal{A}_-} |f(x)| \, d\mu(x) + \int_{\mathcal{A}_+} \|f\|_\infty^2 \, d\mu(x) \\ &< +\infty,\end{aligned}$$

ce qui prouve que f est dans $\mathcal{L}^2(X)$. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 5.30. *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ avec $p < q$ et $r \in [p, q]$. Alors pour toute fonction f mesurable sur X on a*

$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}$$

où $\theta \in [0, 1]$ est tel que

$$\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} = \frac{1}{r}.$$

En particulier,

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) \cap L^q(X, \mathcal{M}, \mu) \subset L^r(X, \mathcal{M}, \mu).$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'inégalité dans le cas $r \in]p, q[$. Dans ce cas on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{p}{\theta r}$ et $\frac{q}{(1-\theta)r}$ pour écrire

$$\begin{aligned}\|f\|_r^r = \int_X |f|^r \, d\mu &= \int_X |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta) r} \, d\mu \\ &\leqslant \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_X |f|^q \, d\mu \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}} \\ &\leqslant \|f\|_p^{\theta r} \|f\|_q^{(1-\theta)r}.\end{aligned}$$

D'où le résultat en prenant la puissance $1/r$. □

5.6 Densité des fonctions continues à supports compacts, applications

Dans ce paragraphe on se place sur $\mathbb{R}^d$, muni de la tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue.

Au début de ce cours, on a très largement élargi la notion de fonction intégrable, de sorte que l'espace $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ contient des fonctions très exotiques, et en particulier des fonctions très irrégulières. Il en est évidemment de même pour tous les espaces $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On imagine bien qu'en pratique on rencontrera toute sortes de problèmes pour étudier ces espaces.

Ce qui va sauver pas mal de situations est que l'on va pouvoir approcher ces fonctions très irrégulières par des fonctions qui sont au contraire très régulières.

On note $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions continues à supports compacts dans $\mathbb{R}^d$ (c'est-à-dire continues et nulles en dehors d'un compact de $\mathbb{R}^d$). Ce sont des fonctions qui sont dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$ (plus précisément, ce sont des fonctions dans $\mathcal{L}^p(X)$, dont les classes d'équivalence sont donc dans $L^p(X)$) et qui, pour le coup, sont des fonctions assez agréables.

Le but de ce paragraphe est de montrer que $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. On donnera ensuite des exemples de résultats qui se démontrent en utilisant cette propriété.

On note tout de suite que le résultat ne peut pas être vrai dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, puisque si on considère (la classe d'équivalence de) la fonction constante égale à 1 alors

$$\forall \phi \in C_c^0(\mathbb{R}^d), \quad \|1 - \phi\|_\infty \geqslant 1.$$

Théorème 5.31. *Soit $p \in [1, +\infty[$. L'ensemble $C_c^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à supports compacts dans $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.*

Démonstration. On cherche à montrer que pour $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - \varphi\|_p \leqslant \varepsilon$.

• Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lambda(A) < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ contenant A et tel que $\lambda(U \setminus A) \leqslant (\varepsilon/3)^p$. On a alors

$$\|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_U\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $B(n)$ la boule de centre 0 et de rayon n. Puisque $\mathbb{1}_U$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{1}_{U \cap B(n)}$ au sens de la convergence simple, et donc dans L^p par le théorème de convergence dominée, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si on note $V = U \cap B(n)$ alors

$$\|\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_V\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^d$ on pose

$$\varphi_k(x) = \min\big(1, k\,\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus V)\big).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est continue (et même lipschitzienne), nulle en dehors de V, et converge simplement vers $\mathbb{1}_V$ quand k tend vers $+\infty$. Par le théorème de convergence dominée on en déduit que $\|\mathbb{1}_V - \varphi_k\|_p$ tend vers 0, et en particulier il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\mathbb{1}_V - \varphi_k\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors

$$\|\mathbb{1}_A - \varphi_k\|_p \leqslant \varepsilon,$$

ce qui donne le résultat pour l'indicatrice d'une partie mesurable de mesure finie.

• Par l'inégalité triangulaire, on obtient que le résultat est encore valable pour toute fonction étagée nulle en dehors d'un ensemble de mesure finie.

• Soit maintenant $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$. On note $f = f_+ - f_-$ où f_+ et f_- sont dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et à valeurs positives (on a $\|f\|_p^p = \|f_+\|_p^p + \|f_-\|_p^p$). Il existe une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers f_+. Puisque chaque fonction f_n est dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, elle est forcément nulle en dehors d'un ensemble de mesure finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_+ - f_n|^p \leqslant |f_+|^p$, donc par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\|f_+ - f_n\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_+ - f_n\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Puisqu'il existe g_+ continue à support compact telle que $\|f_n - g_+\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, on obtient que $\|f_+ - g_+\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe g_- continue à support compact telle que $\|f_- - g_-\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $g = g_+ - g_-$ est continue à support compact et

$$\|f - g\|_p \leqslant \|f_+ - g_+\|_p + \|f_- - g_-\|_p \leqslant \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Remarques 5.32.
- Plus précisément, on a montré la densité de l'ensemble des fonctions lipschitziennes à supports compacts.
- Plus généralement le résultat est valable pour (X, d) espace métrique localement compact et séparable et μ une mesure borélienne sur X finies sur les compacts.
- Avec une démonstration analogue, on montre que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Ainsi, l'ensemble des fonctions qui sont limites au sens de l'intégrale (norme L^1) d'une suite de fonctions en escalier est l'espace des fonctions Lebesgue-intégrables.

On donne maintenant des exemples d'applications du théorème 5.31. Le point commun de ces résultats est qu'on mondre d'abord une propriété pour les fonctions continues à supports compacts et qu'on l'étend ensuite à tout $L^p(\mathbb{R}^d)$ par densité.

Proposition 5.33. *Soit* $p \in [1, +\infty[$. *Alors* $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ *est séparable (admet une partie dénombrable dense).*

Démonstration. • Pour $N \in \mathbb{N}$ on note Q_N l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{Q}$ constantes sur $\prod_{j=1}^d \left[\frac{k_j}{2^N}, \frac{k_j+1}{2^N}\right[$ pour tous $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$, et nulles en dehors de $[-2^N, 2^N]^d$. Comme Q_N est dénombrable pour tout $N \in \mathbb{N}$, $Q = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} Q_N$ l'est également. Montrons que Q est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.
• Soit g une fonction continue à support compact. Il existe $R, M > 0$ tels que $|g| \leqslant M\mathbb{1}_{[-R,R]^d}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est uniformément continue, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z}$ et $x, y \in \left[\frac{k_j}{2^N}, \frac{k_j+1}{2^N}\right[$ on a

$$|g(x) - g(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut construire $\varphi \in Q$ telle que $|\varphi| \leqslant M\mathbb{1}_{[-R,R]^d}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a

$$|g(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors

$$\|g - \varphi\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - \varphi(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{[-R,R]^d} \varepsilon^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant (2R)^{\frac{d}{p}} \varepsilon.$$

• Soient maintenant $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ et $\eta > 0$. D'après le Théorème 5.31, il existe $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f - g\|_p \leqslant \frac{\eta}{2}$. Puis, d'après ce qui précède, il existe $\varphi \in Q$ telle que $\|g - \varphi\|_p \leqslant \frac{\eta}{2}$. On a alors $\|f - \varphi\|_p \leqslant \eta$, ce qui prouve que Q est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, et donc dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ par passage au quotient. □

On termine ce paragraphe avec une deuxième application utile du Théorème 5.31. On cherche à comparer une fonction avec sa translatée. Pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^d$, on note

$$\tau_y f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x-y) \end{array} \right.$$

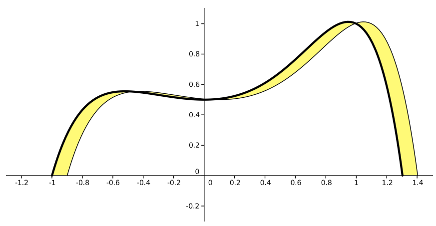

FIGURE 5.1 – Une fonction f et sa translaté. L'aire en jaune représente la distance dans $L^1(\mathbb{R})$ entre ces deux fonctions

On s'attend à ce que $\tau_y f$ soit proche de f si y est petit, et c'est bien le cas pour tout $p \in [1, +\infty[$. À nouveau, il est clair que ce ne peut pas être le cas avec $p = +\infty$. En effet si on considère $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\tau_y f = \mathbb{1}_{[y,1+y]}$, donc $\|\tau_y f - f\|_\infty = 1$ pour tout y non nul, même petit.

Proposition 5.34. *Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. *Alors on a*

$$\|\tau_y f - f\|_p \xrightarrow[y \to 0]{} 0.$$

Démonstration. • On commence par montrer le résultat dans le cas où f est continue à support compact. Soient $M \geqslant 0$ un majorant de $|f|$ et $R > 0$ tel que le support de f est inclus dans la boule $B(R)$ de centre 0 et de rayon R. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|y\| \leqslant 1$ on a alors

$$|\tau_y f - f| \leqslant 2M\mathbb{1}_{B(R+1)}$$

Par continuité de f, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\tau_y f(x) - f(x)|^p \xrightarrow[y\to 0]{} 0.$$

Par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\|\tau_y f - f\|_p \xrightarrow[y\to 0]{} 0.$$

- On montre maintenant le cas général. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 5.31 il existe g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour $y \in \mathbb{R}^d$ on a aussi

$$\|\tau_y f - \tau_y g\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - g(x-y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'après le cas précédent, il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|y\| \leqslant \delta$ on a $\|\tau_y g - g\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour un tel y on a donc

$$\|\tau_y f - f\|_p \leqslant \|\tau_y f - \tau_y g\|_p + \|\tau_y g - g\| + \|g - f\|_p \leqslant \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Remarque 5.35. La Proposition 5.34 dit précisément que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ fixée l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & L^p(\mathbb{R}^d) \\ y & \mapsto & \tau_y f \end{array} \right.$$

est continue en 0 (on peut vérifier que cela assure qu'elle est en fait continue sur tout $\mathbb{R}^d$).

5.7 Fonctions convexes

5.7.1 Définition

Définition 5.36. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si

$$\forall a, b \in I, \forall \theta \in [0,1], \quad f\big((1-\theta)a + \theta b\big) \leqslant (1-\theta) f(a) + \theta f(b). \tag{5.6}$$

En prenant par exemple $\theta = \frac{1}{2}$, la définition dit que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Cela signifie que la valeur de f évaluée au milieu de $[a,b]$ est inférieure ou égale à la moyenne de $f(a)$ et $f(b)$. Mais le cas du milieu entre a et b n'est qu'un cas particulier, et une fonction convexe vérifie cette propriété pour n'importe quel point entre a et b. On peut se placer au tiers de $[a,b]$, au trois quarts, etc.

Il faut bien comprendre à quoi correspond le point $x_\theta = (1-\theta)a + \theta b$. Lorsque θ va de 0 à 1, le point x_θ va de a à b, de telle sorte que le rapport entre la longueur de l'intervalle parcouru $[a, x_\theta]$ sur la longueur de l'intervalle total $[a,b]$ est exactement

$$\frac{x_\theta - a}{b - a} = \theta.$$

Dans le cas particulier $a = 0$ et $b = 1$ on a simplement $x_\theta = \theta$.

De la même façon, l'ordonnée $y_\theta = (1-\theta) f(a) + \theta f(b)$ va de $f(a)$ à $f(b)$ lorsque θ va de 0 vers 1, en respectant le même rapport

$$\frac{y_\theta - a}{f(b) - f(a)} = \theta.$$

Tout cela s'exprime simplement en termes de *barycentres*.

Lorsque θ va de 0 à 1, les points

$$(x_\theta, f(x_\theta)) \quad \text{et} \quad (x_\theta, y_\theta)$$

vont du point $A = (a, f(a))$ au point $B = (b, f(b))$ en passant respectivement par le graphe de f et par le segment $[A, B]$. L'hypothèse (5.6), que l'on peut encore écrire

$$\forall \theta \in [0,1], \quad f(x_\theta) \leqslant y_\theta,$$

dit simplement que le graphe de f entre A et B est « sous » la corde joignant A à B en ligne droite (voir Figure 5.2).

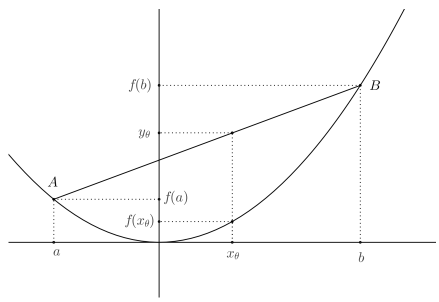

Figure 5.2 – Le graphe d'une fonction convexe et la corde entre deux points.

Exemple 5.37. Une fonction affine $x \mapsto \alpha + \beta x$ est convexe car on a toujours égalité dans (5.6).

Exemple 5.38. La fonction f qui à $x \in [0,1]$ associe

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

est convexe.

Exemple 5.39. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned} \big((1-\theta)a + \theta b\big)^2 - \big((1-\theta)a^2 + \theta b^2\big) &= -\theta(1-\theta)a^2 - \theta(1-\theta)b^2 + 2\theta(1-\theta)ab \\ &= -\theta(1-\theta)(a-b)^2 \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

La propriété de convexité n'est pas très facile à vérifier en pratique. L'hypothèse (5.6) est en fait le résultat que l'on va utiliser en pratique plus qu'une hypothèse de départ. Il nous faut donc des critères aussi simples que possible pour montrer qu'une fonction est convexe.

Avant de donner de tels critères, on donne d'autres définitions dérivées de la notion de convexité.

Définition 5.40. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convave si $(-f)$ est convexe, c'est-à-dire si

$$\forall a, b \in I, \forall \theta \in [0,1], \quad f\big((1-\theta)a + \theta b\big) \geqslant (1-\theta)f(a) + \theta f(b).$$

Ainsi, le graphe d'une fonction concave est au-dessus des cordes entre deux points. On définit maintenant les fonctions strictement convexes. Ce sont en particulier des fonctions convexes, mais les cordes ne peuvent pas être confondues avec le graphe, comme c'est le cas pour les exemples 5.37 ou 5.38 si $a \neq 1$ et $b \neq 1$. La fonction carré de l'exemple 5.39 est elle strictement convexe.

Définition 5.41. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq b$ on a

$$\forall \theta \in]0,1[, \quad f\big((1-\theta)a + \theta b\big) < (1-\theta)f(a) + \theta f(b).$$

Évidemement, pour cette définition il faut exclure les cas $a = b$ et $\theta \in \{0,1\}$ pour lesquels il y a forcément égalité dans (5.6). On définit de façon analogue les fonctions strictement concaves.

5.7.2 Convexité et croissance des pentes

On a introduit la notion de convexité en se basant sur la comparaison entre le graphe de f et ses cordes. Un autre point de vue, également très géométrique, est de comparer les pentes des différentes cordes. En approchant les tangentes par les cordes, cela donnera un criètre pratique pour montrer la convexité d'une fonction régulière.

Proposition 5.42. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si l'une des trois assertions équivalentes suivantes est vérifiée.*

(i) *Pour tous $a, b \in I$ avec $a < b$ et pour tout $x \in]a, b[$ on a*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.7}$$

(ii) *Pour tous $a, b \in I$ avec $a < b$ et pour tout $x \in]a, b[$ on a*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{5.8}$$

(iii) *Pour tous $a, b \in I$ avec $a < b$ et pour tout $x \in]a, b[$ on a*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{5.9}$$

Démonstration. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$ et $x \in]a, b[$. On note

$$\theta = \frac{x - a}{b - a},$$

de sorte que $x = (1 - \theta)a + \theta b$. Il est alors facile de vérifier que (5.6) est équivalente à (5.7), à (5.8) ou à (5.9), ce qui donne les équivalences annoncées (on note que pour montrer que f est convexe il suffit d'avoir (5.6) pour $a < b$ et $\theta \in]0, 1[$). □

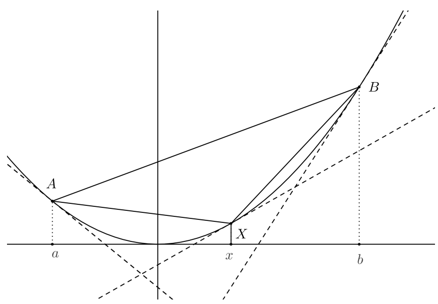

FIGURE 5.3 – Croissance de la pente des cordes et des tangentes.

Proposition 5.43. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante. En outre, dans ce cas, le graphe de f est au-dessus de chacune de ses tangentes, ce qui s'écrit encore*

$$\forall a, b \in I, \quad f(b) \geqslant f(a) + (b - a)f'(a).$$

Attention, une fonction convexe n'est pas forcément dérivable ! Si on suppose qu'elle est convexe et dérivable, alors sa dérivée et croissante. On utilisera surtout l'équivalence dans l'autre sens, à savoir qu'une fonction dérivable de dérivée positive est convexe. Dans tous les cas, la dérivabilité est une *hypothèse* dans cette proposition.

Démonstration. On suppose que f est convexe. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Pour tout $x \in]a, b[$ on a (5.7). En faisant tendre x vers a on obtient

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{5.10}$$

De même, en faisant tendre x vers b dans (5.8) on obtient

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b).$$

Cela prouve en particulier que $f'(a) \leqslant f'(b)$, et donc que f' est croissante.

Inversement, on suppose que f' est croissante et on montre (5.9). Soient $a, b \in I$ avec $a < b$ et $x \in]a, b[$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $x_a \in]a, x[$ et $x_b \in]x, b[$ tels que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_a) \quad \text{et} \quad \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(x_b).$$

Puisque $f'(x_a) \leqslant f'(x_b)$, cela donne (5.9) et prouve que f est convexe.

Finalement, la dernière assertion résulte simplement de (5.10). □

La Proposition 5.43 donne un critère pratique pour montrer qu'une fonction est convexe. Il suffit (mais ce n'est pas une condition nécessaire) qu'elle soit dérivable de dérivée croissante. Mais en pratique, pour montrer qu'une fonction est croissante, on se demande si elle est dérivable de dérivée positive. Quand ce sera possible, on utilisera donc la propriété suivante pour montrer qu'une fonction est convexe.

Proposition 5.44. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.*

Démonstration. On sait que f' est croissante si et seulement si $f'' \geqslant 0$. On conclut alors avec la Proposition 5.43. □

Évidemment on a des critères analogues pour montrer qu'une fonction est concave. Une fonction dérivable f sur I est concave si et seulement si sa dérivée est décroissante, et si f est deux fois dérivable alors elle est concave si et seulement si $f'' \leqslant 0$.

Avec la condition suffisante de la Proposition 5.44 il est maintenant facile de donner des exemples de fonctions convexes ou concaves.

Exemples 5.45.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si n est un entier naturel pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Si n est un entier naturel impair, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.
- Pour $p \geqslant 1$ réel la fonction $x \mapsto x^p = e^{p\ln(x)}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est concave pour $p \in]0, 1[$.

On note maintenant qu'on a des critères analogues pour montrer la stricte convexité (ou stricte concavité).

Proposition 5.46. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.*

(i) *Si f est dérivable de dérivée strictement croissante, alors f est strictement convexe.*

(ii) *Si f est deux fois dérivable de dérivée stictement positive, alors f est strictement convexe.*

La preuve de la Proposition 5.46 est laissée en exercice. On note que contrairement aux Propositions 5.43 et 5.44, les réciproques ne sont pas nécessairement vraies. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^4$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée seconde s'annule en 0.

***Exercice* 2.** Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0, +\infty[$.

***Exercice* 3.** En utilisant la convexité, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^x \geqslant 1 + x.$$

Montrer que pour tout $x > 0$ on a

$$\ln(x) \leqslant x - 1.$$

5.7.3 Inégalités de convexité

On donne dans ce paragraphe quelques exemples simples d'applications de la convexité. Le principe est toujours le même ici, on écrit (5.6) pour une fonction dont on sait qu'elle est convexe ou concave (en général en ayant utilisé la Proposition 5.44) et en des points bien choisis pour obtenir des inégalités utiles.

On commence par l'inégalité de Young, sur laquelle est basé l'inégalité de Hölder.

Proposition 5.47 (Inégalité de Young)**.** *Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugés. Alors pour $a, b \geqslant 0$ on a*
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

On rappelle que cette inégalité est bien connue dans le cas particulier $p = q = 2$. Pour ce cas il suffit d'observer que $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqslant 0$.

Démonstration. L'inégalité est claire si $a = 0$ ou $b = 0$. On suppose maintenant que $a > 0$ et $b > 0$. On note $\alpha = p\ln(a)$ et $\beta = q\ln(\beta)$. Par convexité de la fonction exponentielle on a bien
$$ab = \exp\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}\right) \leqslant \frac{e^\alpha}{p} + \frac{e^\beta}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \square$$

Pour aller plus loin, on observe qu'on peut généraliser la définition (5.6) en considérant le barycentre de plus de deux points.

Proposition 5.48. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction convexe sur I. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\theta_1, \dots, \theta_n \geqslant 0$ tels que $\sum_{j=1}^n \theta_j = 1$. Alors on a*
$$f\left(\sum_{j=1}^n \theta_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n \theta_j f(x_j).$$

L'interprétation est la même qu'avec deux points. Si $\theta_j = \frac{1}{n}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, cette propriété dit que la valeur de f évaluée en la moyenne des x_j ne peut pas être plus grande que la moyenne des $f(x_j)$. Et comme pour deux points, on peut prendre n'importe quel barycentre (à coefficients positifs) et pas seulement les moyennes.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité est claire si $n = 1$, et c'est exactement (5.6) si $n = 2$. On considère maintenant $n \geqslant 3$ et on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$. Si $\theta_n = 1$ on est ramené au cas trivial d'un unique point, donc on peut supposer que $\theta_n \neq 1$. D'après (5.6) on a
$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^n \theta_j x_j\right) &= f\left((1 - \theta_n)\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\theta_j}{1 - \theta_n} x_j + \theta_n x_n\right) \\ &\leqslant (1 - \theta_n) f\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\theta_j}{1 - \theta_n} x_j\right) + \theta_n f(x_n). \end{aligned}$$

Comme
$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\theta_j}{1 - \theta_n} = 1,$$
on a par hypothèse de récurrence
$$f\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\theta_j}{1 - \theta_n} x_j\right) \leqslant \frac{1}{1 - \theta_n} \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j f(x_j).$$

D'où le résultat par récurrence. $\square$

On peut donc donner une inégalité de Young avec plus de deux points. Cela donne le résultat suivant.

Proposition 5.49 (Inégalité de Young)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $p_1, \dots, p_n \in [1, +\infty]$ *tels que*

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

Alors pour $a_1, \dots, a_n \geqslant 0$ *on a*

$$\prod_{j=1}^{n} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^{p_j}}{p_j}.$$

En appliquant ce dernier résultat avec $p_1 = \cdots = p_n = n$ et $a_j = x_j^{\frac{1}{n}}$ on obtient l'inégalité arithmético-géométrique pour les x_j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Cette inégalité montre que la moyenne géométrique des x_j est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique.

Proposition 5.50 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_1, \dots, x_n > 0$. *Alors on a*

$$\left(\prod_{j=1}^{n} x_j \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$