Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels sur l'intégrale des fonctions continues

1.1.1 Intégrales sur un segment

Dans ce paragraphe, on rappelle une définition et les principales propriétés de l'intégrale de Riemann d'une fonction d'une variable réelle. On se contentera d'énoncer les résultats pour des fonctions continues ou continues par morceaux. Considérer en toute généralité les fonctions intégrables au sens de Riemann est un raffinement intéressant mais qui perdra beaucoup de son intérêt une fois que l'on disposera de l'intégrale de Lebesgue. Par contre, on peut profiter de ces rappels pour observer que tous ces résultats (à l'exception de la proposition 1.8 à propos de la relation d'ordre) sont valables pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans un espace de Banach quelconque, ce qui ne sera pas le cas de la construction de l'intégrale de Lebesgue telle qu'on va la donner.

Pour tout ce paragraphe on considère donc un espace de Banach E sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ (on notera $\mathbb{K}$ le corps en question). Pour conserver des notations proches de celles du cas usuel ($E = \mathbb{R}$), on notera simplement $|\cdot|$ la norme de E.

On commence par rappeller la définition et les propriétés de base des fonctions continues par morceaux.

Définition 1.1. Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction de $[a, b]$ dans E. On dit que f est continue par morceaux s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ tels que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ la restriction de f à $]x_{j-1}, x_j[$ est continue et admet des limites finies en x_{j-1} et x_j.

Proposition 1.2. (i) *L'ensemble des fonctions continues par morceaux est stable par somme, produit, et multiplication par un scalaire.*

(ii) *Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*

On rappelle par ailleurs qu'une fonction continue sur un segment est uniformément continue (théorème de Heine).

Quelle que soit la définition choisie, l'idée de l'intégrale de Riemann est d'approcher une fonction par une suite de fonctions en escalier (contantes par morceaux) de plus en plus fines.

Définition 1.3. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision pointée σ de $[a, b]$ la donnée

- d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$,
- de $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ tels que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,
- et de $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, $\xi_2 \in [x_1, x_2]$, ..., $\xi_N \in [x_{n-1}, x_N]$.

En outre on dit que le pas de cette subdivision σ est inférieur ou égal à $\delta > 0$ si

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad x_j - x_{j-1} \leqslant \delta.$$

Étant donnée une fonction f de $[a, b]$ dans E on note alors

$$S_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Proposition 1.4. *Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans E. Alors il existe un unique élément $I(f)$ de E vérifiant la propriété suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée σ de $[a, b]$ de pas inférieur ou égal à δ on a*

$$|S_\sigma(f) - I(f)| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Typiquement, un choix naturel pour avoir une subdivision de plus en plus fine du segment $[a, b]$ est de choisir une subdivision uniforme. Étant donné $N \in \mathbb{N}^*$ on pose, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$

$$x_j = a + \frac{j}{n}(b - a).$$

Et des choix naturels pour choisir ξ_j dans $[x_{j-1}, x_j]$ sont de prendre $\xi_j = x_{j-1}$ ou $\xi_j = x_j$. On obtient alors, pour tout fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{j}{n}(b - a)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\, dx$$

ou

$$\frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{j}{n}(b - a)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a < b$ alors on pose

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Proposition 1.5 (Relation de Chasles)**.** *Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans E. Soit $c \in [a, b]$. Alors on a*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Proposition 1.6 (Linéarité de l'intégrale)**.** *Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, f et g des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans E, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a*

$$\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

et

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

Proposition 1.7 (Inégalité triangulaire)**.** *Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans E. Alors on a*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Proposition 1.8 (Positivité de l'intégrale)**.** *Soit* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$. *Soient* f *et* g *des fonctions continues par morceaux de* $[a,b]$ *dans* E. *Si*

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant g(x),$$

alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Proposition 1.9. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a \in I$. *Soit* f *une fonction continue par morceaux de* I *dans* E. *Pour* $x \in I$ *on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors F *est continue sur* I.

Théorème 1.10 (Primitive d'une fonction continue)**.** *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a \in I$. *Soit* f *une fonction continue de* I *dans* E. *Pour* $x \in I$ *on pose*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors F *est de classe* C^1 *sur* I *et* $F' = f$. *En outre, si* G *est une fonction de classe* C^1 *de* I *dans* E, *alors* G *est une primitive de* f *si et seulement si* $F - G$ *est constante sur* I.

Théorème 1.11 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soient* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue de* $[a,b]$ *dans* E. *Soit* F *une primitive de* f *sur* $[a,b]$. *Alors on a*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

On peut noter $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Théorème 1.12 (Intégration par parties)**.** *Soient* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* u *et* v *deux fonctions de classe* C^1 *de* $[a,b]$ *dans* E. *Alors on a*

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

Théorème 1.13 (Changement de variables)**.** *Soient* $[a,b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* φ *une fonction de classe* C^1 *de* $[a,b]$ *dans un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Soit* f *une fonction continue par morceaux de* I *dans* $\mathbb{R}$. *Alors on a*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Alors $(F \circ \varphi)$ est de classe C^1 sur $[a,b]$ et pour tout $t \in [a,b]$ on a $(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Ainsi, par le théorème fondamentale de l'analyse on obtient

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \big[F(\varphi(t))\big]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \big[F(x)\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$$

D'où le résultat. $\square$

Remarque 1.14. Pour le théorème de changement de variable, on n'a pas supposé que φ est bijective de $[a,b]$ sur son image.

1.1.2 Intégrales « généralisées »

Définition 1.15.

- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Soit f une fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans E. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si la fonction
$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$
(bien définie sur $[a, b[$) admet une limite quand x tend vers b. Dans ce cas on note
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$
- Soient $b \in \mathbb{R}$ et $a \in]-\infty, b[\cup \{-\infty\}$. Soit f une fonction continue par morceaux de $]a, b]$ dans E. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si la fonction
$$x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$$
(bien définie sur $]a, b]$) admet une limite quand x tend vers a. Dans ce cas on note
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt.$$
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Soit $c \in]a, b[$ Soit f une fonction continue par morceaux de $]a, b[$ dans E. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si les intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ le sont. Dans ce cas on pose
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$
La convergence de l'intégrale et, le cas échéant, sa valeur ne dépendent pas du choix de c.

Proposition 1.16 (Intégrales de Riemann)**.**

- *L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si*
$$\alpha > 1,$$
et dans ce cas on a
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$$
- *L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si*
$$\alpha < 1,$$
et dans ce cas on a
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Proposition 1.17 (Comparaison d'intégrales généralisées)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Soient f une fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans E et g une fonction continue par morceaux de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que pour tout $x \in [a, b[$ on a*
$$|f(x)| \leqslant g(x).$$
Alors si l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ l'est également.

1.2 Ensembles dénombrables

1.2.1 Cardinal

Lorsque l'on veut dénombrer les éléments d'un ensemble fini (par exemple, si on veut savoir combien de pommes contient un panier, ou combien de rayures a Arthur le glomorphe à rayures), on établit une bijection entre un ensemble d'entiers et l'ensemble en question. On attribue le nombre 1 à une pomme, le nombre 2 à une autre, le nombre 3 à une troisième, et ainsi de suite, jusqu'à finalement attribuer un entier n à la dernière pomme. On a alors défini une bijection entre l'ensemble des pommes du panier et l'ensemble $[\![1, n]\!]$. Cette bijection n'est pas unique s'il y a au moins deux pommes, mais l'entier n que l'on obtient est toujours le même. On dit alors qu'il y a n pommes dans le panier. Lorsque l'on est plus jeune, et que l'on doit encore compter sur ses doigts, on établit en fait une bijection entre l'ensemble des pommes et un ensemble de doigts. Dans tous les cas, on a compté en établissant une bijection entre l'ensemble étudié et un ensemble de référence bien compris.

Imaginons maintenant que ces pommes soient destinées au goûter d'un groupe d'enfants. Si on peut donner exactement une pomme à chaque enfant (chacun reçoit exactement une pomme, et aucune pomme ne reste à la fin), alors même si on ne sais pas combien on avait de pommes et combien il y a d'enfants, on peut dire qu'il y avait exactement autant de pommes qu'il n'y a d'enfants.

Ces notions sont intuitivement claires tant qu'on ne manipule que des ensembles finis. Comparer le nombre d'éléments pour des ensembles infinis peut par contre amener quelques surprises...

Définition 1.18. On dit que deux ensembles E et F qu'ils ont même **cardinal** s'il existe une bijection de E dans F. Dans ce cas on écrira

$$\mathsf{Card}(E) = \mathsf{Card}(F).$$

Théorème 1.19 (Théorème de Cantor-Bernstein)**.** *Soient E et F deux ensembles. S'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection de E dans F.*

Démonstration. Soit f une injection de E dans F et g une injection de F dans E. On note

$$\tilde{F} = g(F) \subset E.$$

On peut alors voir g comme une bijection de F dans $\tilde{F}$. On maintenant $E_0 = E \setminus \tilde{F}$ puis, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$E_{n+1} = (g \circ f)(E_n).$$

Pour $x \in E$ on note

$$h(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x) & \text{si } x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n, \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela définit une bijection de E dans $\tilde{F}$. $g^{-1} \circ h$ est alors une bijection de E dans F. □

1.2.2 Ensembles finis - Ensembles infinis

Lemme 1.20. *Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. S'il existe une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ alors $n \leqslant p$.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$. Si $p = 0$ alors $n = 0$, car il n'existe pas d'application d'un ensemble non vide dans l'ensemble vide. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang $p-1$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et on suppose qu'il existe une injection ι de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$. Si $n = 0$ alors on a bien $n \leqslant p$. On suppose maintenant que $n \geqslant 1$. On considère la permutation π de $[\![1, p]\!]$ qui échange $\iota(n)$ et p, et laisse invariants les autres éléments. Alors $\pi \circ \iota$ est une injection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ qui envoie n sur p. Par restriction, elle induit une injection de $[\![1, n-1]\!]$ dans $[\![1, p-1]\!]$. Par hypothèse de récurrence on a alors $n - 1 \leqslant p - 1$, et donc $n \leqslant p$. D'où le résultat. □

Corollaire 1.21. *Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $[\![1, n]\!]$ est en bijection avec $[\![1, p]\!]$. Alors $n = p$.*

Définition 1.22. Soit E un ensemble.

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que E est de cardinal n (ou qu'il a n éléments) si E est en bijection avec $[\![1, n]\!]$. Un tel n est nécessairement unique.

(ii) On dit que E est fini s'il est de cardinal n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On dit que E est infini s'il n'est pas fini.

Il est intuitivement clair qu'une partie d'un ensemble fini est elle-même finie, de cardinal plus petit. Si l'on se réfère à la définition précédente, ce n'est plus complètement évident.

Proposition 1.23. *Soient E un ensemble fini et A une partie de E. Alors A est un ensemble fini et $\mathsf{Card}(A) \leqslant \mathsf{Card}(E)$.*

Démonstration. • On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que le résultat est vrai pour $E = [\![1, n]\!]$. Pour $n = 0$, la seule partie de l'ensemble vide est l'ensemble vide lui-même, donc le résultat est immédiat. On suppose le résultat vrai pour $E = [\![1, n-1]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Soit alors A une partie de $[\![1, n]\!]$ et $B = A \setminus \{n\}$. B est alors une partie de $[\![1, n-1]\!]$. Par hypothèse de récurrence, B est fini et $\mathsf{Card}(B) \leqslant n-1$. Si $n \notin A$, alors $A = B$ et le résultat est vrai. Sinon, on note p le cardinal de B et on considère une bijection $\tilde{\varphi}$ de B dans $[\![1, p]\!]$. On définit alors une bijection φ de A dans $[\![1, p+1]\!]$ en posant

$$\varphi(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x) & \text{si } x \in B, \\ p+1 & \text{si } x = n. \end{cases}$$

On obtient que A est fini de cardinal $p+1$, qui est bien inférieur ou égal à n.
• On considère maintenant le cas général. On note $n = \mathsf{Card}(E)$ et on considère une bijection ψ de E dans $[\![1, n]\!]$. Si A est une partie de E, alors $\psi(A)$ est une partie de $[\![1, n]\!]$. Ainsi $\psi(A)$ est lui-même en bijection avec $[\![1, p]\!]$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leqslant n$. Cela prouve que A est fini de cardinal $p \leqslant n$. □

Proposition 1.24. *Soient F et G deux ensembles finis disjoints. Alors $F \sqcup G$ est fini et*

$$\mathsf{Card}(F \sqcup G) = \mathsf{Card}(F) + \mathsf{Card}(G).$$

Démonstration. On note $n = \mathsf{Card}(F)$ et $p = \mathsf{Card}(G)$. Soient f une bijection de F dans $[\![1, n]\!]$ et g une bijection de G dans $[\![1, p]\!]$. Pour $x \in F \sqcup G$ on note

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in F, \\ g(x) + n & \text{si } x \in G. \end{cases}$$

Cela définit une bijection de $F \sqcup G$ dans $[\![1, n+p]\!]$. Cela prouve que $F \sqcup G$ est fini de cardinal $n + p$. □

Proposition 1.25. *Soient E un ensemble fini et A une partie de E. Alors $\mathsf{Card}(A) = \mathsf{Card}(E)$ si et seulement si $A = E$.*

Démonstration. On sait que A et $E \setminus A$ sont finis. On suppose que $E \setminus A$ n'est pas vide. Alors $\mathsf{Card}(E \setminus A) > 0$. Puisque

$$\mathsf{Card}(A) + \mathsf{Card}(E \setminus A) = \mathsf{Card}(E),$$

on obtient que $\mathsf{Card}(A) < \mathsf{Card}(E)$. Par contraposée, si $\mathsf{Card}(A) = \mathsf{Card}(E)$ alors $A = E$. La réciproque est claire. □

Proposition 1.26. *Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F.*

(i) On suppose que F est fini et que f est injective. Alors E est fini et $\mathsf{Card}(E) \leqslant \mathsf{Card}(F)$, avec égalité si et seulement si f est bijective.

(ii) On suppose que E est fini et que f est surjective. Alors F est fini et $\mathsf{Card}(E) \geqslant \mathsf{Card}(F)$, avec égalité si et seulement si f est bijective.

Démonstration. (i) Comme f est injective, elle réalise une bijection de E dans $f(E)$. Comme $f(E)$ est une partie de F, c'est un ensemble fini, de cardinal inférieur ou égal à celui de F, avec égalité si et seulement si $f(E) = F$, c'est-à-dire si et seulement si f est surjective.
(ii) Pour $y \in F$ on note $g(y)$ l'un des antécédents de y par f (toujours possible puisque f est surjective). Cela définit une application g injective de F dans E. En outre g est surjective si et seulement si f est injective. On conclut alors en appliquant la première propriété à g. □

La proposition suivante dit en quelque sorte que $\mathbb{N}$, et les ensembles qui sont en bijection avec $\mathbb{N}$, sont les « plus petits » ensembles infinis.

Proposition 1.27. *Soit E un ensemble infini. Alors il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E.*

Démonstration. On construit par récurrence une injection φ de $\mathbb{N}$ dans E. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons avoir défini $\varphi(k)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Puisque la partie $\{\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)\}$ de E est finie, elle n'est pas égale à E. On peut donc considérer

$$\varphi(n) \in E \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)\}.$$

Cela définit par récurrence une application de $\mathbb{N}$ dans E. Cette application est bien injective. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il existe $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n < p$ et $\varphi(n) = \varphi(p)$, on obtient une contradiction avec la définition de $\varphi(p)$. □

1.2.3 Ensembles dénombrables

Définition 1.28. On dit d'un ensemble qu'il est dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

En particulier, un ensemble fini est considéré comme dénombrable. Certains auteurs définissent les ensembles dénombrables comme étant les ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$, auquel cas les ensembles finis ne sont pas dénombrables.

Exemple 1.29. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est dénombrable, car l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à n associe

$$\varphi(n) = \begin{cases} 2n & \text{si } n \geqslant 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0, \end{cases}$$

est bijective.

On remarque que si E est un ensemble dénombrable, alors il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$ (car une bijection vers une partie de $\mathbb{N}$ définit en particulier une injection vers $\mathbb{N}$). La réciproque est vraie et sera très utile en pratique.

Proposition 1.30. *Soit E un ensemble.*

(i) *S'il existe une injection de E dans un ensemble dénombrable, alors E est dénombrable.*

(ii) *S'il existe une surjection d'un ensemble dénombrable dans E, alors E est dénombrable.*

Démonstration. Comme tous les ensembles finis sont dénombrables, il suffit de considérer le cas où E est infini.

On suppose qu'il existe une injection φ de E dans un ensemble dénombrable F. Comme F est dénombrable, il existe une injection ψ de F dans $\mathbb{N}$. La composée $\psi \circ \varphi$ est alors une injection de E dans $\mathbb{N}$. Comme E est infini, il existe par ailleurs une injection de $\mathbb{N}$ dans E d'après la Proposition 1.27. D'après le Théorème de Cantor-Bernstein, on obtient qu'il existe une bijection de E dans $\mathbb{N}$, et donc que E est dénombrable.

On suppose maintenant qu'il existe une surjection φ d'un ensemble dénombrable F vers E. Pour $x \in E$ on considère un antécédent $f(x)$ de x par φ. Cela définit une application f de E dans F qui est injective. D'après la première propriété, on en déduit que E est dénombrable. □

On remarque qu'on a montré dans la démonstration qu'un ensemble infini dénombrable est en fait en bijection avec $\mathbb{N}$. Comme conséquence immédiate de la première propriété de la Proposition 1.30 on obtient qu'une partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Exemples 1.31.
- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable. En effet l'application
$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto & 2^n(2p+1) \end{array}\right.$$
est injective.
- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.
- Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En effet, l'application qui à $r=\frac{p}{q}$ associe le couple (p,q) (où $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$ et p et q sont premiers entre eux) est injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$) a même cardinal que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$). En effet l'application qui à $A\subset\mathbb{N}$ associe la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
$$x_n=\begin{cases}1 & \text{si } n\in A,\\ 0 & \text{si } n\notin A,\end{cases}$$
est une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 1.32 (Théorème de Cantor)**.** *Soit E un ensemble. Alors E et $\mathcal{P}(E)$ n'ont pas même cardinal.*

Démonstration. Soit φ une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. On considère la partie de E définie par
$$A=\{x\in E\,|\,x\notin\varphi(x)\}$$
Supposons par l'absurde qu'il existe $x\in E$ tel que $\varphi(x)=A$. Si $x\in A$ alors $x\notin\varphi(x)=A$, ce qui est absurde. Si $x\notin A$, alors $x\in\varphi(x)=A$, ce qui est tout autant absurde. Ainsi on obtient par l'absurde que φ n'est pas surjective, et donc pas bijective. Ainsi il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$. □

Corollaire 1.33. *$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.*

Corollaire 1.34. *Soit X un ensemble ayant au moins deux éléments. Alors l'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans X n'est pas dénombrable.*

Démonstration. On considère $(x_0,x_1)\in X^2$ avec $x_0\neq x_1$. On considère l'application φ qui à une partie A de $\mathbb{N}$ associe la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$a_n=\begin{cases}x_0 & \text{si } n\notin A,\\ x_1 & \text{si } n\in A.\end{cases}$$
Cela définit une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $X^{\mathbb{N}}$. Si $X^{\mathbb{N}}$ était dénombrable, on aurait une injection de $X^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}$, et donc une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est absurde. □

Proposition 1.35. *$[0,1]$ est indénombrable.*

Démonstration. On considère l'application
$$\Phi:\left\{\begin{array}{ccc} \{0,1\}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}, \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2a_n}{3^{n+1}}. \end{array}\right.$$
Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ on a
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2a_n}{3^{n+1}}\leqslant\frac{2}{3}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{3^n}\leqslant 1.$$
Ainsi la fonction Φ est bien définie (et à valeurs dans $[0,1]$). Montrons que Φ est injective. Supposons par l'absurde qu'il existe deux suites différentes $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ telle que $\Phi(a)=\Phi(b)$. On note
$$N=\min\{n\in\mathbb{N}\,|\,a_n\neq b_n\}.$$

On peut par exemple supposer que $a_N = 0$ et $b_N = 1$. Notant $S = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{2a_n}{3^{n+1}}$ on a alors

$$\Phi(b) \geqslant S + \frac{2}{3^{N+1}}.$$

et

$$\Phi(a) \leqslant S + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{2a_n}{3^{n+1}} \leqslant S + \frac{1}{3^{N+1}}.$$

D'où $\Phi(a) \neq \Phi(b)$. D'où la contradiction. Ainsi il existe une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (indénombrable) dans $[0,1]$. Cela prouve que $[0,1]$ est indénombrable. $\square$

Corollaire 1.36. *Tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (en particulier $\mathbb{R}$ lui-même) est indénombrable.*

1.3 Analyse dans $[0,+\infty]$

On note $[0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$.

Définition 1.37. On étend l'addition et la multiplication de $[0,+\infty[$ à $[0,+\infty]$ en posant :

(i) $\forall a \in [0,+\infty], \quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty,$

(ii) $\forall a \in [0,+\infty] \setminus \{0\}, \quad a \times (+\infty) = (+\infty) \times a = +\infty,$

(iii) $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0.$

Définition 1.38. On étend la relation d'ordre totale usuelle de $]0,+\infty[$ à $[0,+\infty]$ en disant que pour tout $a \in [0,+\infty]$ on a $a \leqslant +\infty$.

Définition 1.39. Soient $a \in [0,+\infty]$ et $\mathcal{V} \subset [0,+\infty]$.

- Si $a \in \mathbb{R}_+$, on dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a dans $[0,+\infty]$ s'il contient un voisinage de a dans $[0,+\infty[$.
- Si $a = +\infty$, on dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a dans $[0,+\infty]$ s'il contient $]b,+\infty[\cup\{+\infty\}$ pour un certain $b \in]0,+\infty[$.

Définition 1.40. On appelle ouvert de $[0,+\infty]$ une partie de $[0,+\infty]$ qui est voisinage de chacun de ses éléments.

En particulier, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs (qui peut être vue comme une suite d'éléments de $[0,+\infty]$) tend vers $+\infty$ (au sens habituel) si et seulement si elle tend vers $+\infty$ (dans $[0,+\infty]$, pour la topologie que l'on vient de définir). En particulier, une suite croissante dans $[0,+\infty]$ est toujours convergente.