# CC n° 1

**Mercredi 04 mars 2020 (1h30)**

*Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.*

**Exercice 1.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**1.** Calculer $f^{-1}(]a, +\infty[)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
**2.** Montrer que $f$ est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle).
**3.** Montrer que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\lambda$) et calculer son intégrale.

**Exercice 2.** Soient $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $\mu_1$ et $\mu_2$ deux mesures sur $(X, \mathcal{M})$. Pour $A \in \mathcal{M}$ on pose

$$\mu(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A).$$

Montrer que cela définit une mesure $\mu$ sur $(X, \mathcal{M})$.

**Exercice 3.** On munit $\mathbb{R}_+^*$ de sa tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue $\lambda$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$I_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{e^x + x^n} \, d\lambda(x).$$

**1.** Montrer que l'intégrale $I_n$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**2.** Étudier la limite éventuelle de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 4.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace probabilisé (espace mesuré avec $\mu$ mesure de probabilité). On dit que deux fonctions mesurables $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ sont indépendantes si

$$\forall A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \quad \mu\big(f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)\big) = \mu\big(f^{-1}(A)\big)\, \mu\big(g^{-1}(B)\big).$$

**1.** Soient $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ et $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ des fonctions mesurables. Montrer que si $f$ et $g$ sont indépendantes, alors $\varphi \circ f$ et $\psi \circ g$ sont indépendantes.
**2.** Soient $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions étagées et indépendantes. Montrer que

$$\int_X (fg) \, d\mu = \int_X f \, d\mu \int_X g \, d\mu.$$

**3.** Soient $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions indépendantes. Montrer qu'il existe deux suites croissantes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui convergent simplement vers $f$ et $g$ respectivement et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ et $g_n$ sont indépendantes.

**4.** Soient $f, g : X \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions indépendantes. Montrer que

$$\int_X (fg)\, d\mu = \int_X f\, d\mu \int_X g\, d\mu.$$

**5.** Pourquoi a-t-on supposé que $\mu$ est une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{M})$ ?

**Exercice 5.** On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et on considère une mesure $\mu$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il existe un plus grand ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure nulle (c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de mesure nulle qui contient tous les ouverts de mesures nulles).