Examen final

Vendredi 03 mai 2019 (2h)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Pour les exercices 1 à 4, les intégrales sont toutes relatives à la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. 1. Montrer que pour tout $y \in [0, 1[$ on a $\ln(1 - y) \leqslant -y$. En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, n[$ on a

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}.$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ la fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{n}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer la valeur de l'intégrale correspondante.
3. Pour $n \geqslant 2$ on pose

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{-\frac{1}{n}}\, dx.$$

Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 2$ et étudier sa limite éventuelle quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. 1. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{N} f(x + n)\, dx = \int_0^{N+1} f(y)\, dy.$$

b. En déduire que

$$\int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{N}} f(x + n)\, dx = \int_0^{+\infty} f(y)\, dy.$$

2. Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x + n)$ est convergente pour presque tout $x \in [0, 1]$.

b. En déduire que cette série est en fait convergente pour presque tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Soient $a, b \in]1, +\infty[$. On note D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ délimité par les courbes d'équations $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$ et $y = 1/(bx)$, et contenant le point (1,1). Calculer l'aire (c'est-à-dire la mesure de Lebesgue) de D. *Indication : on pourra effectuer le changement de variables $x = u/v$, $y = uv$.*

Exercice 4. Soit φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $p \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $t \mapsto \varphi(t)e^{-tp}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ on pose

$$L_\varphi(p) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-tp}\,dt.$$

On considère f et g deux fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que $L_f(p)$ est au moins définie pour $p > 0$.
2. Montrer que L_f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
3. Pour $t \geqslant 0$ on pose

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds.$$

Montrer que $L_{f*g}(p)$ est bien défini pour tout $p > 0$ et exprimer sa valeur en fonction de $L_f(p)$ et $L_g(p)$.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini tel que $\{x\} \in \mathcal{M}$ pour tout $x \in X$. On note

$$A_\mu = \{x \in X \mid \mu(\{x\}) > 0\}.$$

On dit que la mesure μ est diffuse si $A_\mu = \emptyset$.
1. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est-elle diffuse ? La mesure de Dirac en 0 est-elle diffuse ?
2. On revient au cas général. Montrer que l'ensemble A_μ est dénombrable. En déduire que $A_\mu \in \mathcal{M}$.

On dit que la mesure μ est purement atomique si $\mu(X \setminus A_\mu) = 0$.
3. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est-elle purement atomique ? La mesure de Dirac en 0 est-elle purement atomique ?
4. Donner un exemple de mesure qui n'est ni diffuse ni purement atomique.
5. Montrer que si la mesure μ est purement atomique alors pour tout $B \in \mathcal{M}$ on a

$$\mu(B) = \sum_{x \in B \cap A_\mu} \mu(\{x\}).$$

6. Montrer qu'il existe un unique couple de mesures (μ_d, μ_a) sur $(X, \mathcal{M})$ tel que

$$\begin{cases} \mu = \mu_d + \mu_a, \\ \mu_d \text{ est diffuse,} \\ \mu_a \text{ est purement atomique.} \end{cases}$$