CC n$^\text{o}$ 2

Mercredi 10 avril 2019 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. Énoncer l'inégalité de Hölder.

Exercice 2. **1.** En détaillant bien tous les calculs, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d\lambda_2(x,y),$$

où on a noté λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $1 - e^{-\theta} \leqslant \theta$.
4. Soit $y \geqslant 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1-e^{-yx^2}}{x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (muni de la mesure de Lebesgue). On note alors

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-yx^2}}{x^2}\, dx.$$

5. Sans utiliser les résultats des questions suivantes, étudier la limite éventuelle de $\frac{F(y)}{y}$ quand y tend vers $+\infty$.
6. Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$.
7. Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$. Exprimer la valeur de F' en fonction de l'intégrale I de la question 2.
8. Calculer la valeur de $F(y)$ pour tout $y \geqslant 0$ (en fonction de I).

Correction :
1.
2. Puisque la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, on a

$$2I = \int_R e^{-x^2}\, dx.$$

Puis, par le théorème de Fubini-Tonelli et la question précédente,

$$4I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \pi.$$

D'où

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note $\varphi(\theta) = \theta + e^{-\theta} - 1$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi'(\theta) = 1 - e^{-\theta} \begin{cases} \geqslant 0 & \text{si } \theta \leqslant 0, \\ \leqslant 0 & \text{si } \theta \geqslant 0. \end{cases}$$

Cela prouve que f atteint son minimum en 0. Or $\varphi(0) = 0$, donc φ ne prend jamais de valeurs strictement négatives.

4. Soit $y \geqslant 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x,y) = \frac{1 - e^{-yx^2}}{x^2}.$$

La fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue donc mesurable sur $]0,+\infty[$. D'après la question précédente on a, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1 - e^{-yx^2}}{x^2} \leqslant \frac{yx^2}{x^2} \leqslant 1.$$

Ainsi on a

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant g_y(x)$$

où on a noté

$$g_y(x) = \begin{cases} y & \text{si } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Or g_y est intégrable sur $]0,1]$ et sur $]1,\infty]$, elle est donc inégrable sur $]0,+\infty[$. Cela implique que $f(\cdot,y)$ est intégrable.

5. Correction 1 : Pour $y > 0$ on a, en effectuant le changement de variables $s = \sqrt{y}x$, $ds = \sqrt{y}\,dx$,

$$\frac{F(y)}{y} = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-yx^2}}{yx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-s^2}}{s^2}\,,ds = \frac{F(1)}{\sqrt{y}} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0.$$

Correction 2 : Pour $y \geqslant 1$ on a comme à la question précédent

$$\frac{f(x,y)}{y} \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

En outre, pour tout $x > 0$ on a

$$\frac{f(x,y)}{y} = \frac{1 - e^{-yx^2}}{yx^2} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée on a alors

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{F(y)}{y} = \int_0^{+\infty} \lim_{y \to +\infty} \frac{f(x,y)}{y}\,dx = 0.$$

6. On a vu que pour tout $y \geqslant 0$ la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x > 0$ la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $A > 0$. Alors pour tous $x > 0$ et $y \in [0,A]$

$$0 \leqslant f(x,y) \leqslant g_A(x),$$

où g_A est intégrable (voir question 3). D'après le théorème de continuité sous l'intégrale on obtient que F est continue sur $[0,A]$. Ceci étant valable pour tout $A > 0$, cela prouve que F est continue sur $[0,+\infty[$.

7. La fonction f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[^2$ et pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-yx^2}.$$

Soit $A > 0$. Alors pour $x > 0$ et $y > A$ on a

$$0 \leqslant \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \leqslant e^{-Ax^2}.$$

Or la fonction $x \mapsto e^{-Ax^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient que F est dérivable sur $]A, +\infty[$. Ceci étant valable pour tout $A > 0$, cela prouve que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. En outre pour tout $y > 0$ on a

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{I}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}$$

(on a de nouveau effectué le changement de variables $s = \sqrt{y}x$, $ds = \sqrt{y}\, dx$).
8. Puisque $f(x, 0) = 0$ pour tout $x > 0$ on a $F(0) = 0$. Soit $y > 0$. Puisque F est continue sur $[0, y]$ et dérivable sur $]0, y]$ on a

$$F(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \big(F(y) - F(\varepsilon)\big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^y F'(t)\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^y \frac{I}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \big(2I\sqrt{y} - 2I\sqrt{\varepsilon}\big) = 2I\sqrt{y}.$$

Exercice 3. Soit $t \geqslant 0$. On pose

$$I(t) = \iint_{[1,+\infty[\times\mathbb{R}} \frac{1}{x^2y^2 + x^2 + t}\, d\lambda_2(x, y).$$

Montrer que $I(t)$ est bien définie et calculer sa valeur. On pourra par exemple effectuer le changement de variables $(x, y) = \left(\sqrt{v^2 - t}, \frac{uv}{\sqrt{v^2 - t}}\right)$.

Correction : Pour $(x, y) \in]1, +\infty[\times\mathbb{R}$ on note

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2y^2 + x^2 + t}.$$

Alors f est continue et donc mesurable sur $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$, et elle ne prend que des valeurs positives.

Pour $(u, v) \in D = \mathbb{R}\times]\sqrt{1 + t}, +\infty[$ on pose

$$\varphi(u, v) = \left(\sqrt{v^2 - t}, \frac{uv}{\sqrt{v^2 - t}}\right).$$

Cela définit une fonction de classe C^∞ de D dans $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$. En outre pour $(u, v) \in D$ on a

$$J\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v}{\sqrt{v^2-t}} \\ \frac{v}{\sqrt{v^2-t}} & * \end{pmatrix} = -\frac{v^2}{v^2 - t}.$$

Soit $(x, y) \in]1, +\infty[\times\mathbb{R}$. Alors pour $(u, v) \in D$ (en particulier v est positif) on a

$$(x, y) = \varphi(u, v) \iff \begin{cases} x = \sqrt{v^2 - t} \\ y = \frac{uv}{\sqrt{v^2-t}} \end{cases} \iff \begin{cases} v = \sqrt{x^2 + t} \\ u = \frac{xy}{\sqrt{x^2+t}} \end{cases}$$

Cela prouve que φ réalise une bijection de D dans $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$ dont la réciproque est

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + t}}, \sqrt{x^2 + t}\right).$$

On observe en outre que cette réciproque est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$ (on peut aussi utiliser le théorème de l'inversion globale). Ainsi, φ réalise un C^1-difféomorphisme de D dans $]1, +\infty[\times\mathbb{R}$.

D'après le théorème de changement de variable on a alors

$$\begin{aligned} \iint_{]1,+\infty[\times\mathbb{R}} f(x, y)\, dx\, dy &= \int_D (f \circ \varphi)(u, v)\, |J\varphi(u, v)|\, du\, dv \\ &= \int_D \frac{1}{u^2v^2 + v^2} \frac{v^2}{v^2 - t}\, du\, dv \\ &= \int_D \frac{1}{u^2 + 1} \frac{1}{v^2 - t}\, du\, dv. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli on obtient pour $t > 0$.

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}\,du \int_{\sqrt{1+t}}^{+\infty} \frac{1}{v^2-t}\,dv \\
&= \pi \int_{\sqrt{1+t}}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(-\frac{1}{v+\sqrt{t}} + \frac{1}{v-\sqrt{t}} \right) dv \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{t}} \left[\ln\left(\frac{v-t}{v+t} \right) \right]_{\sqrt{1+t}}^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{t}} \ln\left(\frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}-\sqrt{t}} \right).
\end{aligned}$$

Pour $t = 0$ on obtient par un calcul direct (utilisant le théorème de Fubini-Tonelli) :

$$\int_{[1,+\infty[\times\mathbb{R}} \frac{1}{x^2y^2+x^2}\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \pi.$$

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ deux exposants conjugués. Soient $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy.$$

Montrer que cette intégrale est bien définie pour tout x et que cela définit une fonction $(f * g)$ bornée. Donner une estimation de $\|f * g\|_{\mathcal{L}^\infty}$ en fonction de $\|f\|_{\mathcal{L}^p}$ et $\|g\|_{\mathcal{L}^q}$.