CC n° 1

Mercredi 13 mars 2019 (1h30)

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. **1.** Énoncer le théorème de convergence dominée (version au choix).
2. On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Soit f une fonction intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-n\sin(\pi x)^2} f(x)\, d\lambda(x)$$

est bien définie.
3. Étudier la limite éventuelle de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction : **1.** Voir le cours.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = e^{-n\sin(\pi x)^2} f(x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto e^{-n\sin(\pi x)^2}$ est continue et donc borélienne sur $\mathbb{R}$. En outre f est mesurable par hypothèse, donc f_n est mesurable comme produit de fonctions mesurables. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|f_n(x)| \leqslant |f(x)|\,. \tag{$*$}$$

Comme f est intégrable, on en déduit que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ on a $\sin(\pi x)^2 > 0$ donc

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Puisque $\mathbb{Z}$ est dénombrable et donc de mesure de Lebesgue nulle, f_n converge simplement presque partout vers 0. D'après ($*$) on peut appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\lambda(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Commentaires :
— L'énoncé du théorème de convergence dominée n'a pas de sens si on ne précise pas l'ensemble de départ (un espace mesuré quelconque) et d'arrivée ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des fonctions introduites.
— Il y a plein de définition pour la convergence d'une suite de fonctions. On ne peut pas dire qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction f sans préciser en quel sens la convergence a lieu.
— Pour qu'une intégrale soit définie, il faut toujours que la fonction qu'on intègre soit mesurable. Ensuite, deux possibilités. Soit la fonction est à valeurs positives, soit elle est intégrable.

Exercice 2.
1. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tels que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est une tribu de $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tous A ouvert de $\mathbb{R}$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
3. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Correction : **1.** On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des parties B de $\mathbb{R}$ telles que $A \times B$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$. Comme $A \times \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, c'est en particulier un borélien de $\mathbb{R}^2$, donc $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$. Soit $B \in \mathcal{M}$. On a $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ donc

$$A \times (\mathbb{R} \setminus B) = (A \times \mathbb{R}) \setminus (A \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Cela prouve que $\mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{M}$. On considère maintenant une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$. Comme $A \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$A \times \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \times B_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Cela prouve que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Finalement, on obtient que $\mathcal{M}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.
2. Si B est un ouvert de $\mathbb{R}$ alors $A \times B$ est un ouvert et donc un borélien de $\mathbb{R}^2$, et donc $\mathcal{M}$ contient les ouverts de $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathcal{M}$ est une tribu de $\mathbb{R}$ contenant les ouverts, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$. Cela signifie que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties A de $\mathbb{R}$ telles que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'après la question précédente, $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout ouvert A de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{N}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ (en particulier, $\mathbb{R} \in \mathcal{N}$). Exactement comme à la question 1, on obtient que $\mathcal{N}$ est stable par passage au complémentaire et par union dénombrable. Ainsi $\mathcal{N}$ est une tribu de $\mathbb{R}$ contenant les ouverts, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}$. Cela prouve que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Commentaires :
— Il n'est pas utile de justifier que $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$, que le complémentaire d'une partie de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ ou que l'union dénombrable de parties de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$.
— Un borélien n'est pas forcément ouvert, un borélien de $\mathbb{R}$ n'est pas forcément de la forme $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
— Il n'est pas clair que $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Et c'est d'ailleurs précisément le but de l'exercice que de montrer cette propriété. On ne peut donc évidemment pas l'utiliser pour la démonstration. **1.** Identifier $A \times (\mathbb{R} \setminus B)$ a été un gros problème, alors qu'un simple dessin permet d'éviter toutes ces erreurs.

Exercice 3. On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on note

$$\mu(A) = \int_A e^{-x} \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_A(x) \, d\lambda(x).$$

1. Justifier que $\mu(A)$ est bien définie dans $[0, +\infty]$.
2. Calculer $\mu(\mathbb{R}_+)$ et $\mu(\mathbb{R})$ *(on ne demande pas de justification trop précise pour cette question).*
3. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$ vérifie $\mu(A) = 0$ (on dit que μ est absolument continue par rapport à λ).
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que f est intégrable par rapport à μ si et seulement si $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable par rapport à λ, et que dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} f(x) \, d\lambda(x).$$

On pourra commencer par montrer cette égalité dans le cas où f est étagée à valeurs positives.

Correction : **1.** Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue à valeurs positives, donc $x \mapsto \mathbb{1}_A(x)e^{-x}$ est mesurable et à valeurs positives. L'intégrale définissant $\mu(A)$ a donc bien un sens dans $[0, +\infty]$.

2. On a

$$\mu(\mathbb{R}_+) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} (1 - e^{-n}) = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(\mathbb{R}) \geqslant \int_{-n}^0 e^{-x}\, dx = e^n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$.
3. On a vu que μ est une application de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dans $[0, +\infty]$. En outre on a $\mu(\emptyset) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\lambda(x) = 0$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens de $\mathbb{R}$ deux à deux disjoints. On a

$$\mathbb{1}_{\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n},$$

donc d'après le théorème de convergence monotone,

$$\mu\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-x} \mathbb{1}_{A_n}(x)\, dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_{A_n}(x)\, dx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

D'où μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
4. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) = 0$. Alors $\mathbb{1}_A$ est presque partout nulle donc

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_A(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\lambda(x) = 0.$$

D'où μ est absolument continue par rapport à λ.
5. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par définition on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A\, d\mu = \mu(A) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_A(x)\, d\lambda(x).$$

Soit maintenant g une fonction étagée à valeurs positives. Il existe $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tels que $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$. Par linéarité de l'intégrale on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} g\, d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_j}\, d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{\mathbb{R}} e^{-x} \mathbb{1}_{A_j}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} g(x)\, d\lambda(x).$$

Soient maintenant une fonction f mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions étagées qui converge simplement vers f. La fonction $x \mapsto e^{-x} g_n(x)$ converge alors simplement en croissant vers $x \mapsto e^{-x} f(x)$. Par le théorème de convergence monotone on a

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-x} g_n(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x} f(x)\, d\lambda(x).$$

Soit maintenant f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $f_+ = \max(0, f)$ et $f_- = \max(0, -f)$. D'après ce qui précéde on a

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \left|e^{-x} f(x)\right|\, d\lambda(x),$$

donc f est intégrable par rapport à μ si et seulement si $x \mapsto e^{-x} f(x)$ est intégrable par rapport à λ, et dans ce cas

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu &= \int_{\mathbb{R}} f_+\, d\mu - \int_{\mathbb{R}} f_-\, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} f_+(x)\, d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} e^{-x} f_-(x)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-x} f(x)\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
1. Montrer que f est borélienne.
2. Montrer que l'ensemble des points en lesquels f est discontinue est dénombrable.

Correction : **1.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = f^{-1}([a, +\infty[) \subset \mathbb{R}$. On suppose que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \mathbb{R}$. Soit $x \in A$. Pour tout $y \geqslant x$ on a $f(y) \geqslant f(x) \geqslant a$, donc $y \in A$. Cela prouve que A est un intervalle de la forme $[b, +\infty[$ ou $]b, +\infty[$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$. Dans tous les cas A est un borélien de $\mathbb{R}$. Puisque l'ensemble des intervalles de la forme $[a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on obtient que f est mesurable.
2. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ on note

$$f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

Ces deux limites existent du fait que f est monotone. Ainsi f est discontinue en x_0 si et seulement si

$$f(x_0^+) - f(x_0^-) > 0.$$

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points de discontinuité de f. On a alors $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{D}_n$ où pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a noté $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des points x de $[-n, n]$ tels que $f(x^+) - f(x^-) \geqslant 1/n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $M_n = f(n) - f(-n) \geqslant 0$. Montrons par récurrence sur $k \geqslant 2$ que si $x_1, \dots, x_k$ sont des points de $\mathcal{D}_n$ tels que $x_1 < \cdots < x_k$ alors on a

$$f(x_k^-) - f(x_1^+) \geqslant \frac{k-2}{n}. \tag{$*$}$$

Si $k = 2$ c'est clair puisque f est croissante. Supposons le résultat acquis jusqu'au rang $k - 1$ ($k \geqslant 3$). On a

$$f(x_k^-) - f(x_1^+) \geqslant \underbrace{f(x_k^-) - f(x_{k-1}^+)}_{\geqslant 0} + \underbrace{f(x_{k-1}^+) - f(x_{k-1}^-)}_{\geqslant \frac{1}{n}} + \underbrace{f(x_{k-1}^-) - f(x_1^+)}_{\geqslant \frac{k-3}{n}} \geqslant \frac{k-2}{n},$$

où la troisième minoration est donnée par l'hypothèse de récurrence. D'où ($*$) par récurrence. Puisque par ailleurs on a

$$f(x_k^-) - f(x_1^+) \leqslant M,$$

cela prouve que $k \leqslant nM_n + 2$. En particulier, $\mathcal{D}_n$ est un ensemble fini. Puisque $\mathcal{D}$ est union dénombrable d'ensembles finis, on obtient que $\mathcal{D}$ est dénombrable.