Examen Terminal - 14 mai 2018

Durée : 2h

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera un élément important pour la notation.

Commentaires : Il est de bon goût de vérifier les hypothèses des théorèmes que l'on utilise. Cela permet par exemple de se rendre compte qu'elles ne sont pas vraies...

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. On munit $D =]0, +\infty[\times]a, b[$ de la tribu borélienne usuelle et de la mesure de Lebesgue.

1. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto e^{-xy}$ est intégrable sur D.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$.

Correction : **1.** La fonction $(x, y) \mapsto e^{-xy}$ est continue et donc mesurable sur D. En outre elle ne prend que des valeurs positives. D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\begin{aligned}\int_D e^{-xy}\, d\lambda_2(x, y) &= \int_{]a,b[} \left(\int_{]0,+\infty[} e^{-xy}\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\lim_{A\to+\infty} \left[\frac{e^{-xy}}{-y} \right]_0^A \right) dy \\ &= \int_a^b \frac{1}{y}\, dy = \ln(b) - \ln(a).\end{aligned}$$

2. D'après le théroème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_a^b e^{-xy}\, dy \right) dx = \int_D e^{-xy}\, d\lambda_2(x, y) = \ln(b) - \ln(a).$$

□

Exercice 2 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ deux exposants conjugués. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$. On dit que f_n *converge faiblement* vers f si

$$\forall g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu), \qquad \int_X f_n g\, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f g\, d\mu.$$

1. Montrer que si f_n converge vers f dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ au sens usuel, alors f_n converge faiblement vers f.

2. Pour cette question on se place sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ usuelle et de la mesure de Lebesgue λ. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 mais n'admet pas de limite au sens usuel dans $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Correction : **1.** On suppose que

$$\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Soit $g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$. D'après l'inégalité de Hölder on a

$$\left| \int_X f_n g\, d\mu - \int_X f g\, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) g\, d\mu \right| \leqslant \|f_n - f\|_p \|g\|_q \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Cela prouve que

$$\int_X f_n g\, d\mu \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_X f g\, d\mu.$$

Ainsi f_n converge faiblement vers f dans $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$.

2. Soit $g \in L^q(\mathbb{R})$. On montre de deux façons différentes que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n g\, d\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \qquad (*)$$

• Puisque $f_n = f_n^2$ on peut écrire par l'inégalité de Hölder

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n g \, d\lambda \right| \leqslant \|f_n\|_p \, \|f_n g\|_q \, .$$

On a $\|f_n\|_p = 1$. D'autre part $f_n g$ converge simplement vers 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|(f_n g)(x)|^q \leqslant |g(x)|^q$. Puisque $|g|^q$ est intégrable, on a par le théorème de convergence dominée

$$\|f_n g\|_q^q = \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) g_n(x)|^q \; d\lambda \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Cela prouve $(*)$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'ensemble $C_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^q(\mathbb{R})$, il existe $g_\varepsilon \in C_c^0(\mathbb{R})$ tel que $\|g - g_\varepsilon\|_q \leqslant \varepsilon$. g_ε étant ainsi fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_n g_\varepsilon = 0$ pour tout $n \geqslant N$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors par l'inégalité de Hölder

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n g \, d\lambda \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f_n (g - g_\varepsilon) \, d\lambda \right| \leqslant \|f_n\|_p \, \|g - g_\varepsilon\|_q \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve $(*)$

D'après $(*)$, f_n converge faiblement vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$. Montrons maintenant que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite dans $L^p(\mathbb{R})$ au sens usuel. D'après la question précédente, si une telle limite existe, c'est forcément la fonction nulle. Or ce n'est pas possible puisque $\|f_n\|_p = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $L^p(\mathbb{R})$. □

Exercice 3 Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est une mesure finie. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que f_n converge simplement vers une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ quand n tend vers $+\infty$. Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$ on note

$$E_n^k = \bigcap_{p \geqslant n} \left\{ x \in X \mid |f_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

1. Montrer que E_n^k est mesurable pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n^k$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(E_{n_k}^k) \geqslant \mu(X) - \varepsilon 2^{-k}$.
4. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ et f_n converge uniformément vers f sur $X \setminus A_\varepsilon$.
5. Montrer que ce résultat n'est plus forcément vrai si on retire l'hypothèse que la mesure μ est finie *(on pourra par exemple considérer sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions définie par $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$).*

Correction :
1. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_p - f$ est mesurable comme combinaison linéaire de fonctions mesurables. $\left\{ x \in X \mid |f_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k} \right\}$ est donc mesurable dans X comme image réciproque du borélien $\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right]$ par la fonction mesurable $f_p - f$. E_n^k est alors mesurable comme intersection dénombrable de parties mesurables.
2. Soit $x \in X$. Comme $f_p(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f_p(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k}$ pour tout $p \geqslant n$. Cela signifie que $x \in E_n^k$. Ainsi,

$$X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n^k.$$

L'inclusion inverse étant évidemment vraie, on a bien égalité.
3. On a $E_n^k \subset E_{n+1}^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, d'après la question précédente, $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n^k$. On a donc

$$\mu(E_n^k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(X).$$

En particulier, puisque $\varepsilon 2^{-k} > 0$, il existe $n_k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(E_{n_k}^k) \geqslant \mu(X) - \varepsilon 2^{-k}$.
4. On note

$$A_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (X \setminus E_{n_k}^k).$$

On a alors

$$\mu(A_\varepsilon) \leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varepsilon 2^{-k} = \varepsilon.$$

Montrons que f_n converge uniformément vers f sur $X \setminus A_\varepsilon$. Soit $\eta > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{k} \leqslant \eta$. Soit $n \geqslant n_k$. Alors pour $x \in X \setminus A_\varepsilon$ on a $x \in E_{n_k}^k$ et donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \eta.$$

Cela prouve que f_n converge uniformément vers f sur $X \setminus A_\varepsilon$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$. Alors f_n converge simplement vers 0. On suppose par l'absurde qu'il existe $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(A) \leqslant \frac{1}{2}$ et f_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R} \setminus A$. En particulier il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R} \setminus A} |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

En particulier $[n, n+1] \subset A$, ce qui est absurde. □

Commentaires : Attention aux écritures du type

$$\lim_{n \to +\infty} E_n^k = X$$

On n'a pas défini de topologie sur les parties de X. Par contre si la suite $(E_n^k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion et si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n^k = X$ alors $\mu(E_n^k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(X)$.

Exercice 4 Pour $x > 0$ on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

1. Montrer que $\Gamma(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.
2. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier la limite de Γ en 0.

Correction : **1.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et en particulier mesurable sur $]0, +\infty[$. Par croissances comparées on a

$$0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

donc par comparaison avec une intégrale de Riemann on obtient que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$ est bien définie. D'autre part pour tout $t \in]0, 1]$ on a $0 \leqslant t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{x-1}$. Comme $x - 1 > -1$, on obtient par comparaison avec une intégrale de Riemann que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt$ est bien définie. Finalement $\Gamma(x)$ est bien définie.
2. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ l'application $t \mapsto \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x > 0$, que Γ est k fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour $x > 0$ on a

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

Le cas $k = 0$ est vrai par définition et par la question précédente. On suppose le résultat acquis jusqu'au rang k ($k \in \mathbb{N}$). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ l'application $x \mapsto \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}$ est dérivable de dérivée

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t} = \ln(t)^{k+1} t^{x-1}e^{-t}$$

Soient $\varepsilon, A \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon < A$. Pour $x \in]\varepsilon, A[$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on a alors

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}\right| \leqslant \ln(t)^{k+1} e^{-t}\left(t^{\varepsilon-1}\mathbb{1}_{]0,1]} + t^{A-1}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}\right).$$

La fonction $g : t \mapsto \ln(t)^{k+1}e^{-t}\left(t^{\varepsilon-1}\mathbb{1}_{]0,1]} + t^{A-1}\mathbb{1}_{]1,+\infty[}\right)$ est mesurable. Elle est continue sur $]1, +\infty[$ et

$$|g(t)| = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Elle est continue sur $]0, 1]$ et

$$|g(t)| = \underset{t\to0}{O}\left(t^{\frac{\varepsilon}{2}-1}\right).$$

Par comparaison avec des intégrales de Riemann, on obtient que g est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient que $\Gamma^{(k)}$ est dérivable (donc Γ est $(k + 1)$ fois dérivable) sur $[\varepsilon, A]$ et pour $x \in [\varepsilon, A]$ on a

$$\Gamma^{(k+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^{k+1} t^{x-1}e^{-t}\, dt.$$

Ceci étant valable pour tous $\varepsilon, A > 0$, on obtient que Γ est $(k+1)$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'expression précédente est valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrons que

$$\Gamma(x) \geqslant \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt \xrightarrow[x\to0]{} +\infty.$$

La première inégalité résulte du fait que l'intégrale entre 1 et $+\infty$ est positive car $t^{x-1}e^{-t} \geqslant 0$ pour tous $x > 0$ et $t \geqslant 1$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0. Pour tout $t \in]0, 1]$ la suite $(t^{x_n-1}e^{-t})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $t^{-1}e^{-t}$. Or

$$\int_{]0,1]} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \geqslant \int_{]0,1]} \frac{e^{-1}}{t}\, dt = +\infty.$$

Par le théorème de convergence monotone on obtient que

$$\int_0^1 t^{x_n-1}e^{-t}\, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ceci étant valable pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0, on obtient que

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\, dt \xrightarrow[x\to0]{} +\infty.$$

□

Commentaires : Pour la dernière question, on obtient une limite infinie. Le théorème de convergence dominée ne donne JAMAIS une limite infinie.

Exercice 5 Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
1. Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.
2. On note $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que

$$(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$

Correction : **1.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble

$$A_n^k = \left\{ x \in A_n \mid \mu(\{x\}) \geqslant \frac{1}{k} \right\}$$

est nécessairement fini. Or si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $\mu(\{x\}) > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \in A_n$ et $\mu(\{x\}) \geqslant \frac{1}{k}$, donc $x \in A_n^k$. Ainsi

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mu(\{x\}) > 0\}$$

est inclus dans l'ensemble dénombrable $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_n^k$, et est donc lui-même dénombrable.
2. On note $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \mu(\{x\}) > 0\} = \{x_m\}_{m\in M}$, avec $M \subset \mathbb{N}$ et les x_m, $m \in M$ sont deux à deux distincts. On sait que $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car c'est un fermé. En outre pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\{y \in \mathbb{R}, (x, y) \in \Delta\} = \{x\}\,.$$

On a alors

$$(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\})\, d\nu(x) = \sum_{m \in M} \mu(\{x_n\})\nu(\{x_n\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}).$$

La dernière égalité est simplement due au fait que les termes qu'on ajoute sont nuls. $\square$