Contrôle Continu - 07 mars 2018

Durée : 1h30

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé. L'ensemble $\mathbb{R}$ est toujours muni de sa topologie usuelle et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ correspondante.

Exercice 1 Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Expliciter $f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1. On note $R_{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des rectangles de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$R_{a,b,c,d} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a < x < b \text{ et } c < y < d\right\},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Montrer que $R_{\mathbb{Q}}$ est un ensemble dénombrable de parties de $\mathbb{R}^2$. Pour la suite, on admet que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est union dénombrable d'éléments de $R_{\mathbb{Q}}$.

2. On note $\mathcal{M}$ la tribu de $\mathbb{R}^2$ engendrée par les ensembles de la forme $A \times B$, où A et B sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ contient tous les ensembles de la forme $A \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \times B$, où A et B sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

c. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $\pi_1(x, y) = x$. Montrer que π_1 est une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ on note

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} \,|\, (x, y) \in E\}.$$

a. Montrer que si $E = A \times B$ avec $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

b. On note $T = \{(x, y) \in]0, 1[\,|\, x + y < 1\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer T_x et montrer que c'est un borélien de $\mathbb{R}$.

c. Sans nécessairement fournir les détails de la démonstration, expliquer comment justifier que $E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $E \in \mathcal{M}$.

4. Soit f une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}$ on note $f_x(y) = f(x, y)$. Déduire de la question précédente que la fonction f_x est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5. Soit $E \in \mathcal{M}$. On admet que l'application $x \mapsto \lambda(E_x)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$ et on pose

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x)\, d\lambda(x).$$

a. Calculer $m(T)$, où T est comme défini à la question 3.b. (on admet que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ coïncide avec son intégrale de Riemann)

b. Montrer que m est une mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$.

c. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $m(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$.

6. Soit f une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$ dans $[0, +\infty]$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)$$

est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, d\mu(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$