Contrôle Continu - 07 mars 2018

Durée : 1h30

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé. L'ensemble $\mathbb{R}$ est toujours muni de sa topologie usuelle et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ correspondante.

Exercice 1 Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Expliciter $f^{-1}\big(]a, +\infty[\big)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction : **[4pts]** Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$f^{-1}(]a, +\infty[) = \begin{cases}]-\frac{1}{a}, 0[\cup]0, \frac{1}{a}[& \text{si } a > 0, \\ \mathbb{R}^* & \text{si } a = 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas $f^{-1}(]a, +\infty[)$ est ouvert, et en particulier borélien. Puisque les intervalles de la forme $]a, +\infty[$ pour $a \in \mathbb{R}$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, cela prouve que f est une fonction borélienne. □

Exercice 2

1. On note $R_\mathbb{Q}$ l'ensemble des rectangles de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$R_{a,b,c,d} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a < x < b \text{ et } c < y < d\right\},$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Montrer que $R_\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable de parties de $\mathbb{R}^2$. Pour la suite, on admet que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est union dénombrable d'éléments de $R_\mathbb{Q}$.

Correction : **[2pts]** Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable et que le produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable, $\mathbb{Q}^4$ est dénombrable. D'autre part, l'application

$$\begin{cases} \mathbb{Q}^4 & \to & R_\mathbb{Q} \\ (a, b, c, d) & \mapsto & R_{a,b,c,d} \end{cases}$$

est surjective par définition. Cela prouve que $R_{a,b,c,d}$ est dénombrable. □

Correction : On démontre la partie admise. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{O}$. Il existe $r > 0$ tel que $]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - z, x_2 + r[$ est inclus dans $\mathcal{O}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ on peut considérer $a \in]x_1 - r, x[$, $b \in]x_1, x_1 + r[$, $c \in]x_2 - r, x[$ et $d \in]x_2, x_2 + r[$. On note alors $R(x) = R_{a,b,c,d}$, de sorte que $x \in R(x) \subset \mathcal{O}$. On a alors

$$\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} R(x).$$

Mais l'ensemble des rectangles $R(x)$ (qui est une partie de $R_\mathbb{Q}$) est nécessairement dénombrable, puisque $R_\mathbb{Q}$ l'est. □

2. On note $\mathcal{M}$ la tribu de $\mathbb{R}^2$ engendrée par les ensembles de la forme $A \times B$, où A et B sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

a. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ contient tous les ensembles de la forme $A \times \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \times B$, où A et B sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

Correction : **[2pts]** On note

$$\mathcal{N} = \left\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,|\, A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\}$$

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors $A \times \mathbb{R}$ est un ouvert et donc un borélien de $\mathbb{R}^2$. Cela prouve que $\mathcal{N}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathcal{N}$ est une tribu de $\mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R}$ est ouvert, c'est un élément de $\mathcal{N}$. Soit $A \in \mathcal{N}$. On a

$$(\mathbb{R} \setminus A) \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 \setminus (A \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

car $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Cela prouve que $\mathbb{R} \setminus A$ est dans $\mathcal{N}$. Soit maintenant $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{N}$. On a

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \times \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \times \mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

car $A_n \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela prouve que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{N}$ est une tribu de $\mathbb{R}$ qui contient les ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}$. Cela prouve que $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On montre de façon analogue que $\mathbb{R} \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

b. Montrer que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Correction : **[2pts]** Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{M}$. La tribu $\mathcal{M}$ contient en particulier tous les rectangles de $R_{\mathbb{Q}}$. Puisque tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est union dénombrable d'éléments de $R_{\mathbb{Q}}$, tous les ouverts de $\mathbb{R}^2$ sont dans $\mathcal{M}$. Ainsi $\mathcal{M}$ est une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}^2$, elle contient donc tous les boréliens de $\mathbb{R}^2$.

Montrons maintenant que $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Soient A et B des boréliens de $\mathbb{R}$. D'après la question précédente on a

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Ainsi $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est une tribu contenant toutes les parties de $\mathbb{R}^2$ de la forme $A \times B$ avec $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Elle contient donc $\mathcal{M}$.

Finalement on a bien $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. □

c. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $\pi_1(x, y) = x$. Montrer que π_1 est une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ dans $\mathbb{R}$.

Correction : **[1pt]** Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $\pi_1^{-1}(A) = A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Cela prouve que π_1 est mesurable. □

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ on note

$$E_x = \{y \in \mathbb{R} \,|\, (x, y) \in E\}.$$

a. Montrer que si $E = A \times B$ avec $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Correction : **[1pt]** Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On note $E = A \times B$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$E_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Dans tous les cas on a bien $E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

b. On note $T = \{(x, y) \in]0, 1[\,|\, x + y < 1\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer T_x et montrer que c'est un borélien de $\mathbb{R}$.

Correction : **[1pt]** On a

$$T_x = \begin{cases}]0, 1 - x[& \text{si } x \in]0, 1[, \\ \emptyset & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus]0, 1[. \end{cases}$$

Dans tous les cas T_x est un ouvert et donc un borélien de $\mathbb{R}$. □

c. Sans nécessairement fournir les détails de la démonstration, expliquer comment justifier que $E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $E \in \mathcal{M}$.

Correction : **[1,5pts]** On note

$$\mathcal{N}_x = \{E \in \mathcal{M} \,|\, E_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

D'après la question a, $\mathcal{N}$ contient $A \times B$ pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il suffit donc de vérifier que $\mathcal{N}_x$ est une tribu de $\mathbb{R}^2$ pour conclure que $E \in \mathcal{N}_x$ pour tout $E \in \mathcal{M}$. □

4. Soit f une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $y \in \mathbb{R}$ on note $f_x(y) = f(x, y)$. Déduire de la question précédente que la fonction f_x est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction : **[1,5pt]** Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. On a

$$(f_x)^{-1}(B) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, f(x, y) \in C\} = \left(f^{-1}(B)\right)_x.$$

Puisque f est mesurable, $f^{-1}(B)$ appartient à $\mathcal{M}$. D'après la question précédente on a donc $(f_x)^{-1}(B) = \left(f^{-1}(B)\right)_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Cela prouve que f_x est mesurable. □

5. Soit $E \in \mathcal{M}$. On admet que l'application $x \mapsto \lambda(E_x)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$ et on pose

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x) \, d\lambda(x).$$

a. Calculer $m(T)$, où T est comme défini à la question 3.b. (on admet que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ coïncide avec son intégrale de Riemann)

Correction : **[1pt]** D'après la question 3.b on a

$$\lambda(T_x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in]0, 1[, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus]0, 1[. \end{cases}$$

On a donc

$$m(T) = \int_0^1 (1 - x) \, dx = \frac{1}{2}.$$

□

b. Montrer que m est une mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$.

Correction : **[2pts]** Soit $E \in \mathcal{M}$. L'application $x \mapsto \lambda(E_x)$ est mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$. Son intégrale est donc bien définie et à valeur dans $[0, +\infty]$. Si $E = \emptyset$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $E_x = \emptyset$ et donc

$$m(\emptyset) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\emptyset)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\lambda = 0.$$

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x\right) = \lambda\left(\bigcup (E_n)_x\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda((E_n)_x).$$

D'après le théorème de convergence monotone on a alors

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \int_{\mathbb{R}} \lambda\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_x\right) d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \lambda((E_n)_x)\, d\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n).$$

Cela prouve que m est une mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$. □

c. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $m(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$.

Correction : **[1pt]** D'après la question 3.a on a

$$m(A \times B) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(B)\mathbb{1}_A\, d\lambda = \lambda(A)\lambda(B).$$

□

6. Soit f une fonction mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M})$ dans $[0, +\infty]$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)$$

est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$ et que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)\right) d\lambda(x).$$

Correction : **[4pts]** Soit $E \in \mathcal{M}$ et $f = \mathbb{1}_E$. On a $f_x = \mathbb{1}_{E_x}$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} f_x\, d\lambda = \lambda(E_x).$$

Cela assure que la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)$ est bien mesurable et d'autre part, par définition de m :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, dm = m(E) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(E_x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)\right) d\lambda(x).$$

Soit maintenant f une fonction étagée positive sur $\mathbb{R}^2$. Il existe $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}.$$

Par linéarité de l'intégrale on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_{E_j})_x(y)\, d\lambda(y).$$

Cela assure que la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)$$

est mesurable sur $\mathbb{R}$. Toujours par linéarité on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\mu(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{E_j}(x,y)\, dm(x,y) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{E_j}(x,y)\, dm(x,y) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_{E_j})_x(y)\, d\lambda(y)\right) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\mathbb{1}_{E_j})_x(y)\, d\lambda(y)\right) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)\right) d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie pour les fonctions étagées. On considère finalement une fonction f mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $[0, +\infty]$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge en croissant vers f. Pour $x \in \mathbb{R}$, la suite $((f_n)_x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement en croissant vers f_x, donc par le théorème de convergence monotone on a

$$\int_{\mathbb{R}} (f_n)_x(y)\, d\lambda(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y).$$

Cela assure que la fonction

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y)$$

est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f_n)_x(y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x). \tag{$*$}$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_n(x,y)\, d\mu(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\mu(x,y).$$

La suite

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (f_n)_x(y)\, d\lambda(y) \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est croissante pour tout $x \in \mathbb{R}$ (par monotonie de l'intégrale), donc, toujours par le théorème de convergence monotone :

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f_n)_x(y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}} (f_n)_x(y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

Finalement, en passant à la limite dans ($*$) on obtient bien

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, d\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f_x(y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

$\square$