TD n° 5 : Polynômes et fractions rationnelles

***Exercice* 5.1.** **1.** Calculer le reste et le quotient de la division euclidienne de $1+X+X^2+X^3$ par $2+X$. En déduire une primitive de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^3+x^2+x+1}{x+2}.$$

2. Écrire la division euclidienne de $X^4+5X^3-X^2+2X+1$ par $2X^2-3X+1$.
3. Écrire la division euclidienne de X^3+3X+1 par $2X^2-X+1$. En déduire le comportement asymptotique en $\pm\infty$ de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{x^3+3x+1}{2x^2-x+1}.$$

***Exercice* 5.2.** **1.** Déterminer les racines du polynôme $P(X) = X^2+X+1$.
2. Le polynôme P divise-t-il $(X^8+1)^8 - X^8$?
3. Le polynôme P divise-t-il $(X^5+1)^5 - X^5$?

***Exercice* 5.3.** Décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$ les polynômes X^3-2 et $X^{13}-1$.

***Exercice* 5.4.** **1.** Montrer que $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ est racine du polynôme $P(X) = X^4 - \sqrt{3}X^3 + \sqrt{3}X - 1$. Sans calcul, donner une autre racine complexe de ce polynôme.
2. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X) = X^2 - \sqrt{3}X + 1$, puis en déduire les quatre racines de P.
3. Écrire la décomposition en facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

***Exercice* 5.5.** Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

***Exercice* 5.6.** On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

On note Z l'ensemble des racines de P.
1. Montrer que si $z \in Z$, alors $z^2 \in Z$ et $(z-1)^2 \in Z$.
2. Montrer que si $z \in Z$ alors $|z|$ et $|z-1|$ sont dans $\{0,1\}$.
3. En déduire que $Z \subset \{0, 1, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}\}$, puis que les seules racines possibles pour P sont 0 et 1.
4. Conclure.

***Exercice* 5.7.** Pour chacune des fractions rationnelles $F_j \in \mathbb{R}(X)$ suivantes, donner la décomposition en éléments simples puis une primitive de la fonction $x \mapsto F(x)$ sur son domaine de définition :

$$F_1(X) = \frac{1}{(X+1)(X-1)(X-2)(X+3)}; \quad F_2(X) = \frac{1}{1-X^4};$$

$$F_3(X) = \frac{X^2-3X+4}{X^2-4X+4}; \quad F_4(X) = \frac{X^2}{(X+2)^4}.$$

Pour F_2 on commencera par chercher la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

***Exercice* 5.8.** **1.** Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^3-1$.
2. En déduire que X^4+X^2+1 divise $Q(X) = X^6-1$.
3. Déterminer l'ensemble des racines complexes de Q. Les représenter graphiquement dans le plan complexe.
4. Donner la décomposition en facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.
5. En déduire la factorisation de X^4+X^2+1 en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X^4+X^2+1}$. On pourra utiliser convenablement les points 0, i et $+\infty$.