3.7 Fonctions usuelles

3.7.1 Puissances entières

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $x^0 = 1$ puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}.$$

On peut aussi définir x^n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ en disant que $x^n = x \times x^{n-1}$. Si $x \neq 0$, on définit ensuite les puissances négatives de x par

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

On regroupe dans la proposition suivante un certain nombre de propriétés élémentaires (ou déjà vues) de ces fonctions puissances :

Proposition. *(i) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ on a*

$$x^{n+m} = x^n x^m$$

(ii) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$(xy)^n = x^n y^n.$$

(iii) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \quad \text{avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction $x \mapsto x^n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{d^k x^n}{dx^k} = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

En particulier,

$$\frac{d^n x^n}{dx^n} = n!.$$

Proposition-Définition. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier impair. Alors la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre

$$x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Ainsi $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

sa bijection réciproque. Cette réciproque est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. Alors la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En outre

$$x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Ainsi $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. On note

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

sa bijection réciproque. Cette réciproque est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

3.7.2 Fonctions exponentielles et logarithmes

Le but de ce paragraphe est de donner une définition des fonctions logarithme et exponentielle, et d'en rappeler les principales propriétés. Pour cela on admet temporairement le résultat suivant :

Théorème. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors f admet une primitive F sur I, et l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique primitive de f sur I qui vaut y_0 en x_0.*

On définit alors le logarithme par la propriété suivante :

Définition. On appelle **logarithme (népérien)** et on note ln l'unique primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

À partir de cette définition on retrouve les principales propriétés que vous connaissez déjà pour le logarithme :

Proposition. *La fonction* ln *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) ln *est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$.*

(ii) ln *est strictement croissante sur $]0, \infty[$.*

(iii) Pour tout $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ on a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

En particulier, pour $x \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

(iv) On a

$$\ln(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \quad et \quad \ln(t) \xrightarrow[t \to 0]{} -\infty.$$

(v) ln *réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. (i) Par définition, la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$. En outre sa dérivée est de classe C^∞ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas (toujours sur $]0, +\infty[$). On en déduit que la fonction ln est elle-même de classe C^∞.

(ii) La fonction ln est dérivable de dérivée strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Elle y est donc strictement croissante.

(iii) Soit $a \in]0, +\infty[$. Pour $x \in]0, +\infty[$ on note

$$f(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x).$$

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$f'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0.$$

Cela prouve que f est constante sur $]0, +\infty[$. Comme $f(1) = 0$, f est nulle, et on obtient bien

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

Pour $x > 0$ on obtient alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\ln(x^n) = n \ln(x)$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ négatif, on utilise le fait que

$$\ln(x^n) + \ln(x^{-n}) = \ln(1) = 0,$$

dont on déduit

$$\ln(x^n) = -\ln(x^{-n}) = n \ln(x).$$

(iv) Comme ln est strictement croissante on a $\ln(2) > 0 = \ln(1)$. Soit $M \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\ln(2) \geqslant M$. Par croissance, on obtient que pour tout $x \geqslant 2^n$ on a $\ln(x) \geqslant \ln(2^n) = n\ln(2) \geqslant M$. Cela prouve que

$$\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

D'après la propriété précédente on a pour tout $x \in]0,1[$

$$\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty.$$

(v) Puisque ln est strictement monotone, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur son image. Par ailleurs c'est une fonction continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires et les limites précédentes on peut montrer (comme à l'exercice 3.11) que ln est une fonction surjective de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Finalement, ln est bien une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

□

Définition. On appelle fonction **exponentielle** et on note $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ la bijection réciproque de ln. En outre on note $e = \exp(1)$.

Proposition. *La fonction* exp *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $\exp(0) = 1$.

(ii) exp *est de classe* C^∞ *et* $\exp' = \exp$.

(iii) exp *est strictement croissante.*

(iv) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *on a*

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$

(v) On a

$$\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \quad \textit{et} \quad \exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

(vi) exp *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0,+\infty[$.

(vii) exp *est l'unique fonction vérifiant les deux premières propriétés.*

Démonstration. (i) Pour la première propriété on applique simplement la fonction exponentielle de chaque côté de l'égalité $\ln(1) = 0$.

(ii) La fonction exponentielle est de classe C^∞ comme réciproque d'une bijection de classe C^∞ dont la dérivée ne s'annule jamais. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \exp(x).$$

(iii) La fonction exponentielle est strictement croissante comme réciproque d'une bijection strictement croissante.

(iv) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a d'après la proposition précédente

$$\ln(\exp(a)\exp(b)) = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = a + b.$$

En appliquant exp, on obtient bien $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

(v) Soit $M > 0$. Pour tout $x \geqslant \ln(M)$ on a $\exp(x) \geqslant \exp(\ln(M)) = M$. Cela prouve que $\exp(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On obtient également

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0.$$

(vi) Cette propriété est conséquence immédiate de la définition.

(vii) On suppose que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $g(x) = f(x)\exp(-x)$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(x) = f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp(-x) = 0.$$

Cela prouve que g est constante sur $\mathbb{R}$. Puisque $g(0) = 1$, on obtient que $f(x)\exp(-x) = 1$, soit $f(x) = \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

□

Définition. Pour $a \in]0, +\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$ on note

$$a^b = \exp(b\ln(a)).$$

Remarque.
- Les définitions de a^n et $a^{\frac{1}{n}}$ coïncident avec celles du paragraphe 3.7.1.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^x = \exp(x).$$

Dans les deux propositions suivantes, on s'intéresse aux fonctions de la forme $x \mapsto x^b$ et $x \mapsto a^x$. Attention à ne pas les confondre! En outre, ces notations sont pratiques mais en cas de doute, par exemple pour calculer les dérivées, pensez à revenir à la définition avec exponentielle et logarithme.

Proposition. *Soit $b \in \mathbb{R}$. L'application $x \mapsto x^b$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ de dérivée*

$$\frac{d}{dx}(x^b) = bx^{b-1}.$$

(i) On suppose que $b > 0$. Alors la fonction $x \mapsto x^b$ est prolongeable par continuité par 0 en 0, elle réalise alors une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ et sa réciproque est $x \mapsto x^{\frac{1}{b}}$.

(ii) On suppose que $b < 0$. Alors la fonction $x \mapsto x^b$ réalise une bijection strictement décroissante de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ et sa réciproque est $x \mapsto x^{\frac{1}{b}}$.

Proposition. *Soit $a > 0$. Alors l'application $x \mapsto a^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée*

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \ln(a)a^x.$$

(i) On suppose que $a > 1$. Alors la fonction $x \mapsto a^x$ réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

(ii) On suppose que $a \in]0, 1[$. Alors la fonction $x \mapsto a^x$ réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$.

Dans les deux cas, la réciproque est appelée **logarithme de base** *a.*

Proposition (Croissances comparées).
- *Pour tout $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$ on a*

$$\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha), \quad x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\beta x}) \quad \text{et} \quad e^{-\beta x} = \underset{x\to+\infty}{o}(x^{-\alpha}).$$

- *Pour tout* $\alpha \in]0, +\infty[$ *on a*
$$\ln(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^{-\alpha}).$$

Démonstration. L'application $f : x \mapsto \frac{x^{2\alpha}}{e^{\beta x}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs positives. Pour tout $x > 0$ on a
$$f'(x) = \frac{e^{\beta x} x^{2\alpha - 1}}{e^{2\beta x}} (2\alpha - \beta x)\,.$$
f atteint donc son maximum en $x_0 = \frac{2\alpha}{\beta}$ et pour tout $x > 0$ on a
$$0 \leqslant \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = \frac{f(x)}{x^\alpha} \leqslant \frac{f(x_0)}{x^\alpha} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$
Les autres propriétés se montrent de façon analogue. □

3.7.3 Réciproques des fonctions trigonométriques

Pour la définition des fonctions sinus et cosinus, on s'en remet à la vision géométrique. En deuxième année, ces deux fonctions pourront être définies par leurs séries respectives. On admet les propriétés suivantes :

Proposition. *(i) Les fonction* sin *et* cos *sont* 2π*-périodiques et surjectives de* $\mathbb{R}$ *dans* $[-1, 1]$.

(ii) La fonction cos *est paire et la fonction* sin *est impaire.*

(iii) Les fonctions sin *et* cos *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$. *En outre*
$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin\,.$$
On en déduit par récurrence que les fonctions sin *et* cos *sont en fait de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$.

On renvoie par exemple au cours en ligne suivant pour plus de détails sur l'obtention de ces propriétés par des arguments géométriques :
http://uel.unisciel.fr/mathematiques/analyse3/analyse3_ch02/co/apprendre_ch02_002.html

Proposition-Définition. La fonction sinus réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. On note
$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
la bijection réciproque.

Par définition de la fonction arcsin, on a pour tout $x \in [-1, 1]$
$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$
De même, pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ on a
$$\arcsin(\sin(\theta)) = \theta.$$
⚠ Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la quantité $\arcsin(\sin(\theta))$ est bien définie mais
$$\arcsin(\sin(\theta)) \neq \theta.$$
C'est évident, puisque le membre de gauche est dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ mais pas le membre de droite. Finalement, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\arcsin(\sin(\theta)) = \theta \iff \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Proposition. *(i) La fonction* arcsin *est continue et strictement croissante sur* $[-1,1]$.

(ii) La fonction arcsin *est de classe* C^∞ *sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$ *on a*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. La première propriété résulte du résultat sur les fonctions réciproques. En outre, comme la dérivée du sinus ne s'annule par sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, la fonction arcsin est bien de classe C^∞ sur $]-1,1[$, et pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

car $\cos(\arcsin(x)) > 0$ et $\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - \sin(\arcsin(x))^2 = 1 - x^2$. □

Remarque. On note que

$$\arcsin'(x) \xrightarrow[x\to\pm 1]{} +\infty.$$

Proposition-Définition. La fonction cosinus réalise une bijection strictement décroissante de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. On note

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

la bijection réciproque.

Comme précédemment on a

$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos(x)) = x,$$

et

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \arccos(\cos(\theta)) = \theta \iff \theta \in [0,\pi].$$

Proposition. *(i) La fonction* arccos *est continue et strictement décroissante sur* $[-1,1]$.

(ii) La fonction arccos *est de classe* C^∞ *sur* $]-1,1[$ *et pour tout* $x \in]-1,1[$ *on a*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposition. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *on a*

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration 1. Soit $x \in [-1,1]$. On a

$$x = \cos(\arccos(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right)$$

et, puisque $\frac{\pi}{2} - \arccos(x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x).$$

□

Démonstration 2. Pour $x \in [-1,1]$ on note $f(x) = \arcsin(x) + \arccos(x)$. Alors f est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée

$$f' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Cela prouve que f est constante sur $[-1,1]$. Comme $f(0) = \frac{\pi}{2}$, on obtient que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$. □

On note que pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(\theta) = 0 \iff \theta \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Définition. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta - \frac{\pi}{2} \notin \pi\mathbb{Z}$ on note

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Cela définit une fonction de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan^2(x).$$

Proposition-Définition. La fonction tan réalise une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. On note

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

sa bijection réciproque.

Proposition. *(i) La fonction* arctan *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *En particulier*

$$\arctan(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \arctan(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

(ii) La fonction arctan *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x,$$

et

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right), \quad \arctan(\tan(\theta)) = \theta \iff \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Proposition. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ *on a*

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \textit{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{si } x < 0. \end{cases}$$

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on note

$$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cela définit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Cela implique que f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Il ne reste plus qu'à calculer, par exemple,

$$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

(on peut aussi remarquer que la fonction f est impaire). □

3.7.4 Fonctions hyperboliques

Définition. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1.$$

Proposition-Définition. (i) La fonction ch est paire. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée sh. En outre elle définit une bijection strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$. On note alors $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ sa bijection réciproque.

(ii) La fonction sh est impaire. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée ch. En outre elle définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note alors $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

(iii) La fonction th est impaire. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)^2} = 1 - \operatorname{th}^2(x).$$

La fonction th définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$. On note alors $\operatorname{argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.