TD n° 7 : Produit de convolution et application à la régularisation

***Exercice* 7.1** (Convolution L^1). Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est borélienne.
2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\, dy \right) dx = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

3. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour un tel x on note

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, dy. \tag{$*$}$$

4. Montrer que la fonction $(f*g)$ ainsi définie est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

5. Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on définit $(f*g)$ par $(*)$. Cela définit une fonction dans $L^1(\mathbb{R})$ et on a $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$. Expliquer ce que cela signifie.
6. Montrer que pour $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ on a $f*g = g*f$.

***Exercice* 7.2.** Soient $p, q \in [1, +\infty]$ des exposants conjugués. Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$.
1. Montrer que le produit de convolution $(f*g)(x)$, comme défini par $(*)$, est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $(f*g)$ est bornée et que $\|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
3. Montrer que $(f*g)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que si f et g sont à supports compacts, alors $(f*g)$ est à support compact.
5. Montrer que si p et q sont finis alors $(f*g)$ tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$.

***Exercice* 7.3** (Régularisation). Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ (ensemble des fonctions de classe C^∞ à supports compacts).
1. Montrer que la fonction $(f*\rho)$ définie par $(*)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $(f*\rho)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $(f*\rho)$ est en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
On suppose maintenant que ρ vérifie les propriétés suivantes :

$$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+), \quad \mathrm{supp}(\rho) \subset [-1, 1] \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \rho\, d\lambda = 1.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on note alors $\rho_n(x) = n\rho(nx)$.
4. a. Montrer qu'une telle fonction existe en considérant par exemple ρ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{si } x \in]-1, 1[, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour un certain $\alpha > 0$.
b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+), \quad \mathrm{supp}(\rho_n) \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \rho_n\, d\lambda = 1.$$

5. On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour un certain $p \in [1, +\infty[$. On cherche à montrer que

$$\|f*\rho_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $f_n = f * \rho_n$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)| \, \rho_n(y) \, dy \right)^p .$$

b. En déduire que

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|^p \, \rho_n(y) \, dy.$$

c. En déduire que

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \int_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]} \|\tau_y f - f\|_p \, \rho_n(y) \, dy.$$

d. Conclure.

6. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
7. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

***Exercice* 7.4.** **1.** Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. On veut montrer que $(f * g) \in L^r(\mathbb{R})$ avec $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
2. Montrer le cas $r = \infty$. Pour la suite de la question on suppose que $r \in [1, +\infty[$.
3. Montrer que $p, q \in [1, r]$.
4. On suppose que f et g sont étagées et à valeurs positives. Montrer que $(f * g)$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
5. On suppose que f et g sont à valeurs positives. Montrer que $(f * g)$ définit une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$.
6. Toujours en supposant que f et g sont positives, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$0 \leqslant (f * g)(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)^p g(y)^q \, dy \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)^p \, dy \right)^{\frac{r-p}{rp}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y)^q \, dy \right)^{\frac{r-q}{rq}} .$$

7. En déduire que

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

8. Conclure pour f et g à valeurs positives.
9. Montrer le cas général.

***Exercice* 7.5.** Reprendre tous les exercices précédents en considérant des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$.

***Exercice* 7.6.** Soit $a > 0$. Après en avoir justifier l'existence, calculer le produit de convolution $\mathbb{1}_{[-1,1]} * \mathbb{1}_{[-a,a]}$.

***Exercice* 7.7.** Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On suppose que f, f', g et g' sont bornées, et que f et g' sont intégrables. Montrer que le produit de convolution $f * g$ est bien défini et est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

***Exercice* 7.8.** Pour $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on note

$$g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Pour $(m, \sigma), (\mu, \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, calculer $g_{m,\sigma} * g_{\mu,\tau}$ (on commencera par en justifier l'existance).