TD n$^{\text{o}}$ 6 : Espaces de Lebesgue

***Exercice* 6.1.** A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in [1, \infty]$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle dans $L^p(]0,1[)$? Dans $L^p([0,1])$? Dans $L^p(]1,\infty[)$? Dans $L^p(]0,\infty[)$?

***Exercice* 6.2.** On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. Soit $\alpha > 0$. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on note

$$\mu(A) = \alpha \int_{[0,1]\cap A} e^{-\alpha x}\, d\lambda(x) + e^{-\alpha}\delta_1(A)$$

et

$$\nu(A) = \int_{[0,+\infty[\cap A} e^{-\alpha x}\, d\lambda(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha^k}{k!}\delta_k(A).$$

1. a. Montrer que μ et ν sont des mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
b. Sont-elles finies ?

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = x$ et $g(x) = e^{\alpha x}$.
a. Montrer que f et g sont mesurables.
b. Sont-elles intégrables par rapports à μ ? par rapport à ν ? Si oui, calculer leurs intégrales.

***Exercice* 6.3.** Dans le chapitre sur les espaces de Lebesgue, où a-t-on utilisé le fait que $p \geqslant 1$?

***Exercice* 6.4.** Soit $p \in [1, +\infty[$.
1. Montrer que si $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ admet une limite en $+\infty$ alors cette limite est nulle.
2. Montrer qu'il existe $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$ qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
3. Montrer que si $f \in L^p(\mathbb{R})$ est uniformément continue alors elle tend vers 0 en $+\infty$.

***Exercice* 6.5.** Soit f une fonction mesurable de $(X, \mathcal{M}, \mu)$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\|f\|_\infty = \sup_{\substack{A\in\mathcal{M}\\ \mu(A)>0}} \inf_{x\in A} |f(x)|\,.$$

***Exercice* 6.6.** Soit $p \in [1, +\infty]$. On note

$$\Omega = \{f \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \mid f \geqslant 0 \text{ p.p.}\}\,.$$

Montrer que Ω est d'intérieur non vide si $p = +\infty$ et d'intérieur vide pour $p < +\infty$. *Indication : on pourra commencer par montrer qu'une fonction $f \in \Omega$ bornée n'est pas dans l'intérieur de Ω.*

***Exercice* 6.7.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Montrer que pour $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, $g \in L^q(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $h \in L^r(X, \mathcal{M}, \mu)$ on a $fgh \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ et

$$\|fgh\|_{L^1(X,\mathcal{M},\mu)} \leqslant \|f\|_{L^p(X,\mathcal{M},\mu)} \|g\|_{L^q(X,\mathcal{M},\mu)} \|h\|_{L^r(X,\mathcal{M},\mu)}\,.$$

***Exercice* 6.8.** Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que

$$\forall \phi \in C^0_c(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} f\phi\, d\lambda = 0.$$

Montrer que $f = 0$ p.p.

***Exercice* 6.9.** Soit $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^1(X,\mathcal{M},\mu)\cap L^\infty(X,\mathcal{M},\mu)$. On suppose que cette suite est bornée dans $L^\infty(X,\mathcal{M},\mu)$ et converge dans $L^1(X,\mathcal{M},\mu)$ vers une fonction f. Montrer que f_n converge vers f dans $L^p(X,\mathcal{M},\mu)$ pour tout $p\in[1,+\infty]$.

***Exercice* 6.10** (Inégalité de Hardy)**.** Soient $p\in]1,\infty[$ et $f\in L^p(\mathbb{R}_+)$. Pour $x>0$ on note

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

On cherche à montrer l'inégalité de Hardy

$$\|F\|_p\leqslant\frac{p}{p-1}\|f\|_p\,.$$

1. Montrer que $F(x)$ est bien défini pour tout $x>0$.
2. On suppose que f est continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs positives.
a. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ on a

$$F(x)=-xF'(x)+f(x).$$

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $A>0$ on a

$$\frac{p-1}{p}\int_0^A F(x)^p\,dx\leqslant\int_0^A F(x)^{p-1}f(x)\,dx.$$

c. Montrer l'inégalité de Hardy pour f continue à valeurs positives.
3. En déduire l'inégalité de Hardy pour f continue à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire l'inégalité de Hardy dans le cas général.
5. Montrer que la constante $\frac{p}{p-1}$ est optimale *(on pourra par exemple considérer pour tout $n\in\mathbb{N}$ la fonction $f_n:x\mapsto x^{-\frac{1}{p}}\mathbb{1}_{[1,n]}(x)$).*
6. Examiner les cas $p=1$ et $p=\infty$.

***Exercice* 6.11.** Soit $p\in[1,\infty[$.
1. Donner une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ qui converge simplement presque partout vers une fonction g mais qui ne converge pas vers g dans L^p.
2. Donner une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ qui converge dans L^p vers une fonction f mais qui ne converge pas simplement presque partout vers f.
3. Montrer que si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^p(\mathbb{R})$ converge dans $L^p(\mathbb{R})$ vers une fonction f et converge simplement presque partout vers une fonction g, alors $f=g$ presque partout.