TD n° 5 : Théorèmes de Fubini

***Exercice* 5.1.** Soient $(X_1, \mathcal{M}_1)$ et $(X_2, \mathcal{M}_2)$ deux espaces mesurables. Montrer qu'en général l'ensemble des rectangles mesurables de $X_1 \times X_2$ n'est pas une tribu.

***Exercice* 5.2.** Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

***Exercice* 5.3.** Soient μ_1 et μ_2 deux mesures σ-finies non nulles sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathbb{R}^2 \setminus \Delta) = 0,$$

où on a noté $\Delta = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$.
1. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont tels que $\mu_1(A_1) > 0$ et $\mu_2(A_2) > 0$ alors $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.
3. Montrer que pour μ_1-presque tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mu_2(\mathbb{R} \setminus \{x\}) = 0$. En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha_2 > 0$ tels que $\mu_2 = \alpha_2 \delta_a$.
4. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$, et $\alpha_1, \alpha_2 \in]0, +\infty]$ tels que $\mu_1 = \alpha_1 \delta_a$ et $\mu_2 = \alpha_2 \delta_a$.

***Exercice* 5.4.** Pour $(x,y) \in [0,1]^2$ on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que cela définit une fonction borélienne de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer (en justifiant)

$$\int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1} f(x,y)\, dy \right) dx \quad \text{et} \quad \int_{y=0}^{1} \left(\int_{x=0}^{1} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Indication : on pourra dériver par rapport à y l'expression $y/(x^2+y^2)$.
3. Commenter.

***Exercice* 5.5.** **1.** Calculer $\int_D xy(x+y)\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+ \mid x + y \leqslant 1\}$.
2. Calculer $\int_D \cos(xy)\, dx\, dy$, où $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant xy \leqslant 2\big\}$.
3. Calculer $\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy$, où $D = \big\{(x,y) \in [0,1]^2 \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\big\}$.

***Exercice* 5.6.** **1.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^n \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^n \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt \right) \sin(x)\, dx.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant 0$ on note

$$F_n(t) = \int_0^n e^{-tx} \sin(x)\, dx.$$

Calculer $F_n(t)$.
3. Étudier la limite éventuelle de $\int_0^{+\infty} F_n(t)\, dt$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que

$$\int_0^n \frac{\sin(x)}{x}\, dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

***Exercice* 5.7.** Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On note

$$F = \mathbb{1}_A, \quad \text{où } A = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times X \,|\, 0 < t < f(x)\}.$$

1. On munit $\mathbb{R} \times X$ de la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}$. Montrer que F est mesurable.
2. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, montrer que

$$\int_X f\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x \in X \,|\, f(x) > t\}\big)\, d\lambda(t).$$

3. Montrer que

$$\int_X f\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x \in X \,|\, f(x) \geqslant t\}\big)\, d\lambda(t).$$