TD n° 1 : Tribus

***Exercice* 1.1** (Exemples « simples » de tribus)**.** Soit X un ensemble.
1. Soit $\mathcal{M}$ une tribu de X et $B \in \mathcal{M}$. Montrer que

$$\mathcal{M}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{M}\}$$

est une tribu de B.
2. Soit A une partie de X. Déterminer la plus petite σ-algèbre de X contenant A.
3. Déterminer la tribu engendrée par les singletons de X.
4. Déterminer la tribu engendrée par les parties de X contenant deux éléments.
5. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$. Déterminer la tribu engendrée par les parties de X contenant A.
6. Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux tribus de X. Déterminer les tribus engendrées par $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ et par $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$.
7. Déterminer la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par $\big\{[0,2],[1,3]\big\}$.

***Exercice* 1.2.** Donner un exemple de topologie qui n'est pas une tribu.

***Exercice* 1.3.** Soit X un ensemble non vide. On appelle algèbre de X une famille $\mathcal{A}$ de parties de X telle que $X \in \mathcal{A}$ et pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a $X \setminus A \in \mathcal{A}$ et $A \cup B \in \mathcal{A}$.
1. Soit P une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$. Montrer qu'il existe une plus petite algèbre (au sens de l'inclusion) contenant P.
2. Soit $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'algèbres de X telle que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est une algèbre de X.
3. Que dire de la question précédente si on remplace « algèbre » par « σ-algèbre » ? On pourra par exemple considérer $X = \mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \sigma(\{0\}, \ldots, \{n\})$.

***Exercice* 1.4.** Soient X et Y deux ensembles. Soit f une fonction de X dans Y.
1. Soit $\mathcal{M}$ une tribu sur X. Montrer que $\big\{B \,|\, f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\big\}$ est une tribu sur Y.
2. Soit $\mathcal{N}$ une tribu sur Y. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{N}) = \big\{f^{-1}(B), B \in \mathcal{N}\big\}$ est une tribu sur X.
3. Soit $\mathcal{F}$ une famille de parties de Y. Montrer que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{F})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

***Exercice* 1.5.** Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par l'ensemble des intervalles de la forme $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{Q}$.

***Exercice* 1.6.** Soit X un espace topologique, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$. Soit F une partie de X, muni de la topologie induite et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(F)$ correspondante.
1. Montrer que

$$\mathcal{B}(F) = \{A \cap F, A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

2. Montrer que si F est un borélien de X alors $\mathcal{B}(F)$ est simplement l'ensemble des boréliens de X inclus dans F.

***Exercice* 1.7.** On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont des boréliens de $\mathbb{R}$.

(i) L'ensemble des réels x tels que $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
(ii) L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
(iii) L'ensemble des réels x tels que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a 0 pour valeur d'adhérence.

***Exercice* 1.8.** On note P l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$\prod_{j=1}^{d} \left[\frac{n_j}{2^{-k}}, \frac{n_j+1}{2^{-k}}\right],$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{Z}$.
1. Montrer que P est un ensemble dénombrable de parties de $\mathbb{R}^d$.
2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est union d'éléments de P.
3. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(P)$.
4. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par l'ensemble des boules euclidiennes ouvertes (repectivements fermées).
5. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est engendré par les demi-espaces de la forme

$$\mathbb{R}^{j-1} \times]a, +\infty[\times \mathbb{R}^{d-j},$$

avec $j \in [\![1, d]\!]$ et $a \in \mathbb{R}$.

***Exercice* 1.9.** Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de parties de X. Montrer que pour tout $A \in \sigma(\mathcal{F})$ il existe une famille dénombrable $\mathcal{D}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ telle que $A \in \sigma(\mathcal{D})$. *Indication : on pourra montrer que l'ensemble des A dans $\sigma(\mathcal{F})$ vérifiant cette propriété est une tribu sur X.*

***Exercice* 1.10.** Montrer qu'une tribu contient toujours un nombre fini ou indénombrable d'éléments.