Examen final - 15 mai 2017

Durée : 2h

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera prise en compte pour la notation.

Cours. Énoncer l'inégalité de Hölder.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable. Soit $E \in \mathcal{M}$. On note $\mathcal{M}_E = \{A \in \mathcal{M} | A \subset E\}$.
1. Montrer que $\mathcal{M}_E$ est une tribu sur E.
2. Soit g une fonction mesurable de $(E, \mathcal{M}_E)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour $x \in X$ on note $f(x) = g(x)$ si $x \in E$ et $f(x) = 0$ si $x \notin E$. Montrer que f est une fonction mesurable de $(X, \mathcal{M})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Après avoir justifié que chacune de ces intégrales est bien définie, étudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt}\, dt.$$

Exercice 3. On munit $]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[^2$ de leurs tribus boréliennes et mesures de Lebesgue respectives. Étant données deux fonctions f et g sur $]0, +\infty[$ et $x \in]0, +\infty[$ on note, lorsque cela a un sens,

$$(f \odot g)(x) = \int_{]0,+\infty[} f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{g(y)}{y}\, dy. \tag{1}$$

1. Soient $g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[), \lambda)$ (rappel : cela signifie que g est mesurable et sa restriction à tout compact inclus dans $]0, +\infty[$ est intégrable) et f une fonction de classe C^1 à support dans [1,2].

a. Soit $x \in]0, +\infty[$. Montrer que la fonction $y \mapsto f\left(\frac{x}{y}\right)$ est de classe C^1 et à support dans un compact de $]0, +\infty[$ à préciser.

b. Montrer que l'intégrale $(f \odot g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

c. Soient $a, b \in]0, +\infty[$ avec $a < b$. Montrer que l'application $f \odot g$ est dérivable sur $[a, b]$.

2. a. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[), \lambda)$. Montrer que l'intégrale définie en (1) est bien définie pour presque tout $x \in]0, +\infty[$. *Indication : on pourra s'inspirer de* (2) *et du calcul déjà effectué pour le produit de convolution.*

b. Pour $x \in]0, +\infty[$ tel que l'intégrale (1) n'est pas définie, on note $(f \odot g)(x) = 0$. Montrer qu'on a ainsi défini une fonction $(f \odot g)$ intégrable de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

c. Soient maintenant $f, g \in L^1(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[), \lambda)$. Montrer que (1) définit bien une fonction $(f \odot g)$ dans $L^1(]0, +\infty[, \mathcal{B}(]0, +\infty[), \lambda)$ telle que

$$\|f \odot g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1 . \tag{2}$$

Exercice 4.
1. Soit φ une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que l'image réciproque d'un intervalle par φ est un intervalle.

b. Montrer que φ définit une fonction mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans lui-même.

2. *On rappelle qu'une fonction* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est convexe si et seulement si pour tous* $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}_+$ *tels que* $\sum_{j=1}^n \theta_j = 1$ *et* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ *on a*

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^n \theta_j x_j\right) \leqslant \sum_{j=1}^n \theta_j \varphi(x_j).$$

On rappelle également qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ *est continue.*

Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) = 1$, φ une fonction convexe et croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et f une fonction mesurable de X dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leqslant \int_X (\varphi \circ f) \, d\mu.$$