Corrigé du CC2

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $t \mapsto e^{-t}\sin(t)^n$ est continue et donc mesurable sur $[0,+\infty[$. En outre pour tout $t \geqslant 0$ on a

$$\left|e^{-t}\sin(t)^n\right| \leqslant e^{-t}, \tag{$*$}$$

et la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc la fonction $t \mapsto e^{-t}\sin(t)^n$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $t \geqslant 0$ tel que $t-\frac{\pi}{2}$ n'est pas un multiple de π (c'est-à-dire, en particulier, pour λ-presque tout $t \geqslant 0$) on a

$$e^{-t}\sin(t)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'après le théorème de convergence dominée (l'hypothèse de domination est donnée par $(*)$) on obtient que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(t)^n\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 2 On note $E = D(R)\cap(\mathbb{R}_-\times\{0\})$. Alors l'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ réalise un C^1 difféomorphisme de $]0,R[\times]-\pi,\pi[$ dans $D(R)\backslash E$, et pour tout $(r,\theta)\in]0,R[\times]-\pi,\pi[$, son jacobien en (r,θ) vaut r. Comme $\lambda_2(E)=0$ on a par le théorème de changement de variables

$$\begin{aligned}\int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,d\lambda_2(x,y) &= \int_{D(R)\backslash E} e^{-(x^2+y^2)}\,d\lambda_2(x,y)\\ &= \int_{]0,R[\times]-\pi,\pi[} e^{-(r^2\cos(\theta)^2+r^2\sin(\theta)^2)} r\,d\lambda_2(r,\theta)\\ &= \int_{]0,R[\times]-\pi,\pi[} re^{-r^2}\,d\lambda_2(r,\theta).\end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli on obtient

$$\begin{aligned}\int_{D(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,d\lambda_2(x,y) &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^R re^{-r^2}\,d\lambda(r)\right)d\lambda(\theta)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^R d\lambda(\theta)\\ &= \pi\big(1-e^{-R^2}\big).\end{aligned}$$

Exercice 3 **1.** On identifie f à un représentant dans $\mathcal{L}^1$. Soit $\xi\in\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto e^{ix\xi}$ est continue donc mesurable sur $\mathbb{R}$. Comme f est mesurable par hypothèse, la fonction $x\mapsto e^{ix\xi}f(x)$ est elle-même mesurable sur $\mathbb{R}$. En outre

$$\int_{\mathbb{R}}\left|e^{ix\xi}f(x)\right|\,d\lambda(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,d\lambda(x) < +\infty.$$

Ainsi la fonction $x\mapsto e^{ix\xi}f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'autre part, on observe que son intégrale est inchangée si on remplace f par une fonction qui lui est égale presque partout, donc $\hat{f}(\xi)$ ne dépend pas du choix d'un représentant pour f.

2. L'application $(x,y)\mapsto e^{-ix\xi}f(x-y)g(y)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$ et par le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\left|e^{-ix\xi}f(x-y)g(y)\right|\,d\lambda_2(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^2}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda_2(x,y)\\ &= \int_{\mathbb{R}}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,d\lambda(t)\right)d\lambda(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}}|g(y)|\,\|f\|_1\,d\lambda(y)\\ &= \|f\|_1\,\|g\|_1\,.\end{aligned}$$

Pour la troisième égalité on a fait le changement de variable affine « $t = x - y$ ». Cela prouve que l'application $(x, y) \mapsto e^{-ix\xi} f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème de Fubini-Lebesgue, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * g)}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x-y)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)\xi} f(x-y)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} f(t)\, d\lambda(t) \right) d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-iy\xi} g(y) \hat{f}(\xi)\, d\lambda(y) \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

Exercice 4 **1.** D'après l'inégalité de Hölder, pour tout $f \in \mathcal{L}^p$ on a $fg \in \mathcal{L}^1$ et

$$\left| \int_{\mathbb{R}} fg\, d\lambda \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |fg|\, d\lambda \leqslant \|f\|_p \|g\|_q .$$

D'autre part $\varphi_g(f)$ n'est pas modifié si on remplace f par une fonction de $\mathcal{L}^p$ qui lui est égale presque partout, donc φ_g définit bien une fonction de L^p dans $\mathbb{R}$, avec $|||\varphi_g||| \leqslant \|g\|_q$. En outre φ_g est linéaire par linéarité de l'intégrale, donc φ_g est bien une forme linéaire continue sur L^p.

2. On note que la fonction sign est combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'ouverts de $\mathbb{R}$, et donc mesurable. Ainsi f est mesurable. En outre

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{p(q-1)}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{pq(1-1/q)}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q\, d\lambda(x) < +\infty.$$

Cela prouve que f est dans L^p avec $\|f\|_p^p = \|g\|_q^q$. Comme

$$\varphi_g(f) = \int_{\mathbb{R}} fg\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |g|^q\, d\lambda = \|g\|_q^q ,$$

on a

$$\frac{|\varphi_g(f)|}{\|f\|_p} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^{q/p}} = \|g\|_q^{q(1-1/p)} = \|g\|_q ,$$

ce qui prouve que $|||\varphi_g|||_p \geqslant \|g\|_q$.

Commentaires

- Pour l'exercice 1, la limite
$$\lim_{n\to\infty} e^{-t} \sin(t)^n$$
n'existe pas quand $\sin(t) = -1$. En particulier l'égalité
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-t} \sin(t)^n\, dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} e^{-t} \sin(t)^n\, dt$$
n'a pas de sens. Voilà typiquement un exemple de mauvais usage de la notation lim. Par contre, la suite de fonctions étudiée converge bien simplement presque partout vers la fonction nulle, ce qui suffit pour le raisonnement. Il faut bien distinguer le fait qu'une suite de fonctions converge simplement vers une fonction presque partout nulle ou qu'elle converge simplement presque partout vers la fonction nulle.

- Lorsque vous vérifiez qu'une fonction est intégrable, commencez bien par vérifier qu'elle est mesurable.
- Le théorème de Fubini-Lebesgue ne s'utilise pas à la légère, il y a une hypothèse d'intégrabilité importante à vérifier, ce qui se fait souvent en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli.
- Attention aux changements de variables, encore beaucoup d'erreurs sur les domaines d'intégration.