CC n° 1 - 08 mars 2017

Durée : 1h

Aucun document ou appareil électronique n'est autorisé.

Exercice 1
On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie usuelle et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ correspondante.
1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$, est mesurable.
2. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue est mesurable.
3. On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ -x^2 & \text{si } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1]. \end{cases}$$

Montrer que f est mesurable.
4. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la mesure de Lebesgue λ.
5. Calculer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$.

Exercice 2
Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et Y un ensemble. Soit φ une fonction de X dans Y. On munit Y de la tribu

$$\mathcal{N} = \left\{ B \in \mathcal{P}(Y) \,|\, \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{M} \right\}.$$

On rappelle que φ est alors une fonction mesurable de $(X, \mathcal{M})$ dans $(Y, \mathcal{N})$. Pour $B \in \mathcal{N}$ on note $\nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$. On rappelle que cela définit une mesure ν sur $(X, \mathcal{N})$.
1. Soit $f : Y \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

2. Soit $f : Y \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que f est intégrable sur Y si et seulement si $f \circ \varphi$ est intégrable sur X, et que dans ce cas on a

$$\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

Exercice 3 On munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs topologies usuelles et des tribus boréliennes $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ correspondantes.
1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
2. Soient f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(x) + g(y)$ est une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.