Corrigé du CC1

**Exercice 1**
**1.** Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{1}_A^{-1}([a,+\infty[) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a > 1, \\ A & \text{si } a \in ]0,1], \\ \mathbb{R} & \text{si } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, on a bien $\mathbb{1}_A^{-1}([a,+\infty[) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puisque les intervalles de la forme $[a,+\infty[$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, cela prouve que $\mathbb{1}_A$ est mesurable.
**2.** Soit $O$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Comme $f$ est continue, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc borélien. Puisque les ouverts de $\mathbb{R}$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ cela prouve que $f$ est une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
**3.** Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $g(x) = x^2$. $g$ est mesurable car continue. $[0,1]$ est mesurable car fermé, $\mathbb{Q}$ est mesurable comme union dénombrable de singletons, fermés donc boréliens, puis $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est mesurable complémentaire de $\mathbb{Q}$. Ainsi, $g$, $\mathbb{1}_{[0,1]}$, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ sont mesurables, donc $f = g\mathbb{1}_{[0,1]}(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} - \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}})$ est mesurable.
**4.** On a vu que $f$ est mesurable. En outre,

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \; \lambda = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} < \infty,$$

donc $f$ est intégrable.
**5.** On a $f = -g\mathbb{1}_{[0,1]}$ presque partout, donc

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = -\int_{[0,1]} g \, d\lambda = -\int_0^1 x^2 \, dx = -\frac{1}{3}.$$

**Exercice 2**
**1.** Soit $B \in \mathcal{N}$. On a $\mathbb{1}_B \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}$, donc

$$\int_Y \mathbb{1}_B \, d\nu = \nu(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \int_X \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} \, d\mu = \int_X (\mathbb{1}_B \circ \varphi) \, d\mu.$$

Par linéarité, l'égalité est encore vraie pour une fonction étagée. Dans le cas général, on considère une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge simplement vers $f$. Alors $f_n \circ \varphi$ est une fonction étagée sur $X$ (elle est mesurable comme composée de fonctions mesurables, et ne prend qu'un nombre fini de valeurs), la suite $(f_n \circ \varphi)$ est croissante et elle converge ponctuellement vers $f \circ \varphi$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_Y f_n \, d\nu = \int_X (f_n \circ \varphi) \, d\mu.$$

D'après le théorème de convergence monotone, on obtient par passage à la limite $(n \to \infty)$

$$\int_Y f \, d\nu = \int_X (f \circ \varphi) \, d\mu.$$

**2.** D'après la question précédente, on a

$$\int_Y |f| \; d\nu = \int_X |f| \circ \varphi \, d\mu = \int_X |f \circ \varphi| \; d\mu$$

donc

$$\int_Y |f| \; d\nu < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_X |f \circ \varphi| \; d\mu < \infty.$$

Lorsque ces intégrales sont finies, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_Y f\,d\nu &= \int_T f_+\,d\nu - \int_T f_-\,d\nu \\ &= \int_X f_+\circ\varphi\,d\mu - \int_X f_-\circ\varphi\,d\mu \\ &= \int_X (f\circ\varphi)_+\,d\mu - \int_X (f\circ\varphi)_-\,d\mu \\ &= \int_X f\circ\varphi\,d\mu.\end{aligned}$$

**Exercice 3**
**1.** On note

$$\mathcal{M} = \left\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,|\, A\times\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\right\}.$$

On montre que $\mathcal{M}$ est une tribu de $\mathbb{R}$ contenant les ouverts.

- Si $O$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $O\times\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, donc un borélien. D'où $O\in\mathcal{M}$.
- En particulier $\mathbb{R}\in\mathcal{M}$.
- Soit $A\in\mathcal{M}$. On a $(\mathbb{R}\backslash A)\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2\backslash(A\times\mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ car $A\times\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. D'où $X\backslash A\in\mathcal{M}$.
- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$. On a $A_n\times\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\times\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n\times\mathbb{R}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

D'où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{M}$. Ainsi, $\mathcal{M}$ est une tribu contenant les ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}$. D'où le résultat.
**2.** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on note $\varphi(x,y)=f(x)$. Soit $B$ un borélien de $\mathbb{R}$. Comme $f^{-1}(B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a, d'après la question précédente,

$$\varphi^{-1}(B) = f^{-1}(B)\times\mathbb{R}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

D'où $\varphi$ est mesurable. De même la fonction $(x,y)\mapsto g(y)$ est mesurable, puis $(x,y)\mapsto f(x)+g(y)$ est mesurable comme somme de fonctions mesurables.