Université Toulouse 3 — Département de Mathématiques
Année 2016-2017 — L1 Parcours Spécial - Mathématiques

TD n° 2 :

Nombres complexes

***Exercice* 2.1.** **1.** On partage le plan complexe en 8 zones D_1 à D_8 (voir figure 2). Remplir le tableau 1 en indiquant dans quel zone se trouvent $\bar{z}$, $-z$, $1/z$ et $-1/\bar{z}$ si z se trouve dans la zone D_j pour $j \in [\![1, 8]\!]$.
2. Le plan complexe est maintenant partagé comme indiqué à la figure 3. On considère $z_1 \in D_{j_1}$ et $z_2 \in D_{j_2}$ pour $j_1, j_2 \in [\![1, 8]\!]$. Indiquer dans le tableau 4 les zones où peut alors se trouver le produit $z_1 z_2$.

$z \in$	$\bar{z} \in$	$-z \in$	$1/z \in$	$-1/\bar{z} \in$
D_1				
D_2				
D_3				
D_4				
D_5				
D_6				
D_7				
D_8				

Figure 1 – Tableau pour la question 1 de l'exercice 2.1

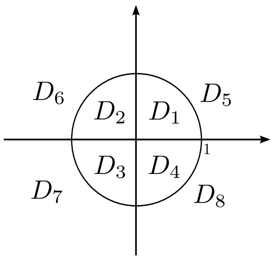

Figure 2 – Zones du plan complexe

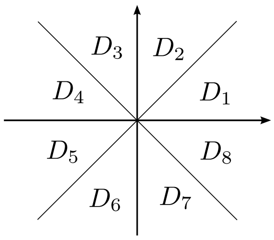

Figure 3 – Zones du plan complexe (bis)

	$z_2 \in D_1$	$z_2 \in D_2$	$z_2 \in D_3$	$z_2 \in D_4$	$z_2 \in D_5$	$z_2 \in D_6$	$z_2 \in D_7$	$z_2 \in D_8$
$z_1 \in D_1$	$D_1 \cup D_2$							
$z_1 \in D_2$								
$z_1 \in D_3$								
$z_1 \in D_4$								
$z_1 \in D_5$								
$z_1 \in D_6$								
$z_1 \in D_7$								
$z_1 \in D_8$								

Figure 4 – Tableau pour la question 2 de l'exercice 2.1.

***Exercice* 2.2.** **(Forme cartésienne, forme trigonométrique, représentation géométrique)**
1. Donner le module et l'argument de zz', $z'\overline{z}$, $\frac{z}{z'}$, ainsi que $z'\overline{z}^2$ en fonction de ceux de z et de z'.
2. Mettre sous forme polaire (ou trigonométrique) les nombres complexes suivants et les représenter géométriquement :

$$z_1 = i \quad z_2 = -1 + i \quad z_3 = -1 - i \quad z_4 = \frac{1}{2 + 2i} \quad z_5 = \frac{1 - i}{1 + i}$$

3. Écrire sous forme cartésienne les nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\pi} \quad z_2 = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_3 = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

4. Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Quelle est la partie réelle de $x + iy$?
5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$. A-t-on $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$?

***Exercice* 2.3.** Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

$$z_1 = 1 + \cos(\theta) - i\sin(\theta), \quad z_2 = 1/z_1, \quad z_3 = 1 + i\tan(\alpha), \quad z_4 = \frac{z_3}{\overline{z_3}},$$

$$z_5 = 1 + i\cot(\alpha), \quad z_6 = \frac{\cos(x) - i\sin(x)}{\sin(x) - i\cos(x)}.$$

***Exercice* 2.4.** Représenter les ensembles

$$\{\exp(1+it), t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \{\exp(t+i), t \in \mathbb{R}\}.$$

***Exercice* 2.5.** **1.** Calculer $(2+i)^3$.
2. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de $2+11i$.

***Exercice* 2.6.** Démontrer que $e^{ix} - 1 = e^{ix/2}(2i\sin x/2)$. Donner une formule analogue pour $e^{ix} + 1$ et la démontrer.

***Exercice* 2.7.** **1.** Déterminer le module, un argument, les parties réelles et imaginaires de

$$e^{2+3i}; \qquad e^{i(2+3i)}; \qquad e^{z}; \qquad e^{iz}; \qquad e^{\bar{z}}; \qquad e^{1/z}$$

où $z = x + iy$.
2. Résoudre l'équation

$$e^z = 1 + i$$

On donnera *toutes* les solutions, et on les exprimera sous forme polaire et cartésienne.
3. Même question avec

$$e^z = 12e^{i\frac{\pi}{13}}$$

***Exercice* 2.8.** **1.** On note $Z = 3 - 4i$.
a. Donner le module de chacune des racines de Z.
b. Sans calcul, préciser dans quelles zones parmi celles de la figure 3 se trouvent ces racines
c. Calculer explicitement les racines carrées de Z et confirmer les réponses aux questions précédentes.
2. Mêmes questions avec $Z = 8 + 6i$.

***Exercice* 2.9.** **1.** Calculer les racines carrés du nombre complexe $-3 - 4i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z(1+4i) - 3 + 3i = 0$

***Exercice* 2.10.** **1.** Mettre le nombre complexe $e^{i\pi/6}$ sous forme cartésienne et calculer ses racines carrées.
2. En déduire que

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

3. Utiliser la même méthode pour déterminer $\sin\frac{\pi}{8}$.

***Exercice* 2.11.** Autre méthode pour déterminer des racines carrées. Soit z un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}_-$ et soit $u = z + |z|$.
1. Montrer que $Re(u) > 0$.
2. Montrer que $u^2 = 2Re(u)z$.
3. Écrire z comme fonction de u et en déduire une expression simple des racines carrées de z.
4. Application : Trouver les racines carrées de $15 - 8i$.

***Exercice* 2.12.** Les nombres suivants sont-ils des racines de l'unité ? Si oui, préciser pour quelle valeur de n. Si non, expliquer pourquoi.

$$z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}; \qquad z_2 = \frac{4-i}{1+2i}; \qquad z_3 = e^{i\frac{5\pi}{15}}; \qquad z_4 = e^{\frac{i}{2}}$$

***Exercice* 2.13.** **1.** Soit $Z = \frac{-1}{(\sqrt{3}+i)^2}$. Mettre Z sous forme trigonométrique.
2. $\frac{Z}{|Z|}$ est elle une racine $n-$ème de l'unité. Si oui, préciser n.
3. Résoudre $z^4 = Z$. Combien cette équation admet-elle de solutions ? Les représenter dans le plan complexe. Quelle figure géométrique obtient-on ? Expliquer.

***Exercice* 2.14.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$
1. Trouver toutes les solutions de $z^n = 1$ (utiliser l'écriture trigonométrique de z).
2. Soit a, b deux nombres complexes non nuls tels que $a^n = b^n$. Que dire de a/b (c-a-d de quelle forme est-il) ?
3. Représenter graphiquement tous les z solutions de l'équation $z^4 = (1+i)^4$.
4. Résoudre $(z+i)^n = (z-i)^n$. Vérifier que les solutions sont réelles.
5. Résoudre directement l'équation $(z+i)^4 = (z-i)^4$ et retrouver les résultats précédents.

***Exercice* 2.15.** **1.** Développer $(\cos x + i \sin x)^3$. En déduire une expression de $[\sin(3x) - \cos(3x)]$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\frac{\sin(3x)}{\sin x}$ comme polynômes en $\sin x$ et $\cos x$.
3. Peut-on les exprimer comme polynômes en $\sin x$? comme polynômes en $\cos x$? Si oui, donner l'expression correspondante.
4. Linéariser $\cos^3 x \sin x$.

***Exercice* 2.16.** Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$.
1. Montrer que $|z + c| \leqslant |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leqslant 1$. Quand a-t-on égalité ?
2. Soient $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité. Montrer que l'application $f : D \to D$, $z \mapsto \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$ est bien définie et que c'est une bijection vérifiant $f(C) = C$.

***Exercice* 2.17.** On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $m + ni$, avec $m, n \in \mathbb{Z}$. On munit $\mathbb{Z}[i]$ de l'addition et de la multiplication comme dans $\mathbb{C}$.
1. Vérifier que ces opérations sont « internes » à $\mathbb{Z}[i]$.
2. Quelles propriétés vérifient-elles ? $\mathbb{Z}[i]$ est-il un corps ? Dessiner l'ensemble correspondant dans le plan d'Argand-Cauchy.
3. Quel est le plus petit corps contenant $\mathbb{Z}$ et i contenu dans $\mathbb{C}$?