Calcul Différentiel et Intégral

Examen final - mercredi 06 janvier 2016

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter le sujet dans l'ordre, mais veillez à toujours bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. On considère le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 7,\, 8 - x < y < x + 1\}.$$

1. Dessiner D.
2. Calculer : $\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$.

Correction : Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$8 - x < x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{7}{2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy &= \int_{x=\frac{7}{2}}^{7} \left(\int_{y=8-x}^{x+1} \frac{1}{(x+y)^2}\,dy\right)dx = \int_{x=\frac{7}{2}}^{7} \left[-\frac{1}{x+y}\right]_{y=8-x}^{x+1} dx \\ &= \int_{x=\frac{7}{2}}^{7} \left(-\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{8}\right)dx = \left[-\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_{\frac{7}{2}}^{7} + \frac{7}{16} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{15}\right) + \frac{7}{16}.\end{aligned}$$

□

Exercice 2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120.$$

Étudier les éventuels extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$ (question bonus : étudier les extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$).

Correction : La fonction f est polynômiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 18 + 2y \\ 4y - 24 + 2x \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{cases} 2x + 2y - 18 = 0 \\ 2x + 4y - 24 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ainsi (6,3) est l'unique point critique de f. On calcule la Hessienne en ce point. On a

$$\operatorname{Hess} f(6,3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\det(\operatorname{Hess} f(6,3)) > 0$ et $\operatorname{Tr}(\operatorname{Hess} f(6,3)) > 0$, donc f admet un minimum local en (6,3). En outre f n'admet pas d'autre extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

Puisque f n'a pas de maximum local, elle n'admet pas de maximum global (on peut également voir par exemple que $f(x,0)$ tend $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$). Si f admet un minimum global, c'est nécessairement en (6,3). On écrit f comme somme de carrés. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = (x+y-9)^2 + (y-3)^2 + 30 \geqslant 30 = f(6,3).$$

Cela prouve que f admet un minimum global en (6,3). $\square$

<u>Commentaires :</u>

- Il faut étudier la régularité de f avant d'en calculer les dérivées partielles (ici il suffit d'une demi-ligne).
- Dans cet exercice on demande *tous* les extrema locaux, donc une réponse du type « f admet un minimum local en (6,3) » n'est pas complètement satisfaisante. Pour cela il faut commencer par déterminer *tous* les points critiques, donc une phrase telle que « (6,3) est un point critique » n'est pas complètement satisfaisante non plus.
- Le mot « extrema » est un pluriel, le singulier étant « extremum » (« extremums » est également possible).

Exercice 3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f et les expliciter lorsqu'elles sont définies.
3. Montrer que f est différentiable en (0,0) et préciser la différentielle.

<u>Correction :</u> On commence par observer que l'application f est de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ comme produit de composées de fonctions usuelles.

1. Il reste à étudier la continuité en un point de la forme $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$. Mais pour $(x,y) \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant 1 + |x_0|$ on a

$$|f(x,y) - f(x_0,0)| = |f(x,y)| \leqslant |x|\,|y| \leqslant (1+|x_0|)\,|y| \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0.$$

Cela prouve que f est continue en $(x_0,0)$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, cela prouve que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. On a vu que les dérivées partielles de f existent sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ le calcul donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin\left(\frac{1}{y}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \sin\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{x}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right).$$

Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on a

$$\frac{f(x_0+t,0) - f(x_0,0)}{t} = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

donc f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(x_0,0)$ qui vaut 0. D'autre part

$$\frac{f(x_0,t) - f(x_0,0)}{t} = x_0 \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Cette quantité admet une limite quand t tend vers 0 si et seulement si $x_0 = 0$. Ainsi f admet une dérivée partielle par rapport à y en (0,0) (qui vaut 0) mais pas en $(x_0,0)$ si $x_0 \neq 0$.

3. On considère sur $\mathbb{R}^2$ la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ (par exemple). Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|f(x,y)| \leqslant |x|\,|y| \leqslant \|(x,y)\|^2.$$

Cela prouve que f est différentiable en (0,0) de différentielle nulle (le fait que la différentielle est nulle peut également s'obtenir par les dérivées partielles). $\square$

<u>Commentaires :</u>

- Attention à bien identifier les problèmes. Ici il n'y avait pas seulement à distinguer l'étude au point (0,0) (comme cela a souvent été le cas en exercice) mais en tous les points de la forme $(x_0,0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Pour calculer les dérivées partielles sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, inutile de revenir aux taux d'accroissement. Sur cet ouvert f est définie par des fonctions usuelles, on peut dériver comme d'habitude.

- Quand on étudie la continuité au point $(x_0, 0)$, on ne peut pas se contenter d'étudier la limite

$$\lim_{y\to 0} f(x_0, y)$$

avec x_0 fixé.
- Cet exercice met en valeur les grosses difficultés persistantes avec les notions de continuité pour une fonction de plusieurs variables, de différentiabilité, et même de dérivées partielles. Certes c'est subtile et difficile, mais il faut faire bien attention pour ne pas tout mélanger.

Exercice 4. On considère l'arc paramétré

$$\gamma : \begin{cases} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right) \end{cases}$$

et la forme différentielle $\omega = x\,dy - y\,dx$.
1. Calculer l'intégrale de ω le long de γ.
2. Calculer l'intégrale de ω le long du segment s joignant $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$.
3. Déterminer si la forme ω est exacte.
4. Montrer que l'image de γ est incluse dans le domaine $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x\right\}$.
5. Calculer l'aire du domaine délimité par l'arc γ et le segment s (on admet que le bord de ce domaine est exactement donnée par l'union des images de γ et de s).

Correction : **1.** On a

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1+t^4} \times \frac{3t^2(1+t^4)-4t^6}{(1+t^4)^2} - \frac{t^3}{1+t^4} \times \frac{1+t^4-4t^4}{(1+t^4)^2}\right) dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t^4)^2)}dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+t^4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

2. On a $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Le segment joignant $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$ peut donc être paramétré par

$$\begin{cases} [0, \frac{1}{2}] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t,t) \end{cases}$$

On obtient alors

$$\int_s \omega = \int_0^{\frac{1}{2}} (t-t)\,dt = 0.$$

3. Les intégrales de ω le long de deux courbes joignant $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$ sont différentes, donc ω n'est pas exacte. On peut également simplement vérifier que ω n'est pas fermée et donc pas exacte.
4. Pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$\frac{t}{1+t^4} \geqslant \frac{t^3}{1+t^4}$$

donc $\gamma(t)$ a bien une abscisse plus grande que son ordonnée.
5. D'après la formule de Green-Riemann, l'aire du domaine est donnée par

$$\frac{1}{2}\int_\gamma \omega - \frac{1}{2}\int_s \omega = \frac{1}{8}.$$

□

Exercice 5. On considère une fonction f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0.$$

On note

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(f(x,y),y) = 0\right\}.$$

1. Montrer qu'il existe une fonction φ définie d'un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ vers un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telle qu'au voisinage de (0,0) dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble C coïncide avec le graphe de φ.
2. On suppose maintenant que pour tout $(x,y) \in C$ on a $y \geqslant 0$. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Correction : **1.** Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on note $g(x,y)=f(f(x,y),y)$. C est alors l'ensemble des points où g s'annule. En outre g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée des fonctions f et $(x,y)\mapsto(f(x,y),y)$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+1\right)\neq 0.$$

D'après le théorème de l'inversion locale, il existe des voisinages $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction φ de classe C^1 de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{W}$ tels que pour tout $(x,y)\in\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ on a $(x,y)\in C$ si et seulement si $y=\varphi(x)$. Cela siginifie que dans $\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ l'ensemble C coïncide avec le graphe de φ.

2. Pour tout $x\in\mathcal{V}$ on a $\varphi(x)\geqslant 0$. Puisque $\varphi(0)=0$, la fonction φ est de classe C^1 et admet un minimum en 0, donc $\varphi'(0)=0$. D'autre part pour tout $x\in\mathcal{V}$ on a $g(x,\varphi(x))=0$. En dérivant par rapport à x on obtient en 0

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+\varphi'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)+\varphi'(0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

On en déduit que

$$0=\varphi'(0)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\left(1+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)},$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$

□

Commentaires :

- Dans cet exercice on n'étudie pas l'ensemble d'équation $f(x,y)=0$. Cela ne mène à rien d'appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction f.