Université Paul Sabatier
L2 Mathématiques – Année 2015-2016
Algèbre linéaire et bilinéaire

FEUILLE 4 : Espaces euclidiens

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, déterminer parmi les applications suivantes celles qui correspondent à un produit scalaire sur E :
a) $E = \mathbb{R}$, $< x, y >= x^2 + 2xy$,
b) $E = \mathbb{R}^2$, $< (x, y), (x', y') >= xx' + yy' - 2xy' + 2yx'$,
c) $E = \mathbb{R}^2$, $< (x, y), (x', y') >= 3xx' + yy' + 2xy' + 2yx'$,
d) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $< P, Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$,
e) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $< P, Q >= P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$,
f) $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$, $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Exercice 2.
Soit a un réel et B_a l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$B_a((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 + (a + 12)x_3y_3 - 3(x_1y_3 + x_3y_1) + 2(x_2y_3 + x_3y_2)$$

a) Montrer que B_a est une forme bilinéaire symétrique.
b) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles B_a est un produit scalaire.

Exercice 3.
Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et soit φ définie sur $E \times E$ par $\varphi(A, B) = Tr({}^tAB)$.
a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
b) Soit A dans E telle que ${}^tAA = 0$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 4.
Après avoir introduit un produit scalaire adéquat sur un espace euclidien E à préciser, montrer les inégalités suivantes et étudier les cas d'égalité :
a) Pour a, b, c réels, $|6a + 3b + 2c| \leq 7\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
b) Pour a, b, a', b' réels, $|aa' - 2ab' - 2ba' + 6bb'| \leq \sqrt{a^2 - 4ab + 6b^2}\sqrt{a'^2 - 4a'b' + 6b'^2}$
c) Pour $n \geq 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs, $\sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$
d) Pour f continue sur $[a, b]$ à valeurs réelles strictement positives, $\int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f}(t)dt \geq (b-a)^2$

Exercice 5.
Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien, on notera $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire. Pour $n \geq 1$, donnons-nous $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de E.
a) Montrer que $\| \sum_{i=1}^n v_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|v_i\|$
b) En déduire que, pour $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt \leq \Big(\int_a^b (f(t))^2 dt + \int_a^b (g(t))^2 dt \Big)^2$$

Exercice 6.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u = (1, -1, 3, 0, 2)$ et $v = (2, -2, 5, 1, 1)$. Donner une base de l'orthogonal $F^\perp$ de F.

Exercice 7.
Soit $(E, <, >)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces de E. Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

$$(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Exercice 8.

Trouver une base orthonormale pour le produit scalaire canonique du sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (1,0,-1,1)$ et $v_3 = (0,1,1,1)$.

Exercice 9.

Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormale pour ce produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10.

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E préservant l'orthogonalité,i.e. $< x, y >= 0 \Rightarrow < f(x), f(y) >= 0$. Montrer alors qu'il existe un réel $k \geq 0$ tel que $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice 11.

Considérons $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et soit F le sous-espace vectoriel défini par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12.

Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on note $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique. Soient $u = e_1 + e_3$, $v = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$ et $F = Vect(u, v)$.

a) Construire une base orthonormale de F.

b) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base e.

c) En déduire la distance du vecteur $w = e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4$ au sous-espace F.

d) Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base e.

Exercice 13.

Calculer le minimum pour (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ de :

$$\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$$

Indication : on munira l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire

$$< P, Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)dx$$

puis on traduira le problème en terme de distance à $\mathbb{R}_1[X]$.