TD n° 0

Révisions de première année.

Exercice 0.1. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 0.2. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la rotation R_1 d'angle $\frac{\pi}{2}$ et la rotation R_2 d'angle $\frac{\pi}{4}$. Donner les matrices de R_1 et R_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 0.3. On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. La famille (u, v) est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

2. On note D_u et D_v les droites respectivement engendrées par u et v. Les droites D_u et D_v définissent-elles des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?

3. On considère la projection p de $\mathbb{R}^2$ sur D_u parallèlement à D_v. Donner la matrice de p dans la base canonique puis dans la base (u, v).

Exercice 0.4. On note $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomophisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\begin{cases} f(e_1) & = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ f(e_2) & = -4e_2 - 2e_3, \\ f(e_3) & = 4e_1 + 12e_2 + 5e_3. \end{cases}$$

1. Déterminer $\ker(f)$.

2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$. Quelle relation doivent satisfaire les coordonnées d'un vecteur (a, b, c) pour qu'il appartienne à $\mathrm{Im}(f)$?

3. On considère la base $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ avec $\epsilon_1 = (-4, 3, 2)$, $\epsilon_2 = (-4, 0, 1)$, $\epsilon_3 = (2, 1, 0)$. Donner la matrice de passage entre e et ϵ. En déduire la matrice de f dans la base ϵ.

Exercice 0.5. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(u) = (-1, 4, 0), \quad f(v) = (2, 10, 9) \quad \text{et} \quad f(w) = (5, -2, 9).$$

2. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$f(x, y, z) = (x - 2y + 4z, -4x + 8y + 2z, 9z).$$

3. En déduire la matrice de f dans la base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer le noyau de f et en donner une base.

5. Donner une base de l'image de f et en déduire une équation.

6. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ et que la famille $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ avec $\epsilon_1 = 2e_1 + e_2$, $\epsilon_2 = e_1 - 4e_2$, $\epsilon_3 = 2e_2 + e_3$ forme une base adaptée à cette décomposition.

7. Donner les matrices de passage entre les bases e et ϵ. En déduire la matrice de f dans la base ϵ.

Exercice 0.6. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et le déterminant de f.
2. On considère $\epsilon_1 = (1, -1, 0)$, $\epsilon_2 = (0, 1, -1)$ et $\epsilon_3 = (1, 1, 1)$. Donner la matrice de f dans la base $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$.
3. On considère le plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$. Montrer que $f(P) = P$. On notera g la restriction de f à P. Montrer que (ϵ_1, ϵ_2) est une base de P et calculer les matrices de g et g^2 dans cette base.
4. Expliciter un projecteur p et une homothétie h tels que $f^2 = p \circ h$.

Exercice 0.7. On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = \int_0^1 P(x)\,dx$ pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$.
1. Montrer que f est une forme linéaire. Donner les dimensions de son noyau et de son image.
2. Montrer qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on a

$$f(P) = aP(0) + bP'(0) + cP''(0) + dP^{(3)}(0).$$

3. Déterminer une base de $\ker(f)$.

Exercice 0.8. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on définit $\ell : E \to \mathbb{R}^3$ par $\ell(P) = (P(0), P'(0), P(1))$.
1. Montrer que ℓ est une application linéaire et donner sa matrice dans les bases canoniques de E et $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\ker(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$ et retrouver dans ce cas le théorème du rang. Peut-on parler de la somme directe de $\ker(\ell)$ et de $\mathrm{Im}(\ell)$?
3. Soit F le plan vectoriel de E engendré par 1 et X^2. Donner une base de $\ell(F)$. Discuter en fonction de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de la résolution de l'équation $\ell(P) = (x, y, z)$ d'inconnue $P \in F$.

Exercice 0.9. On considère $A \in \mathcal{M}(n_1, n_1)$, $B \in \mathcal{M}(n_1, n_2)$, $C \in \mathcal{M}(n_2, n_1)$, $D \in \mathcal{M}(n_2, n_2)$ avec A inversible. Déterminer les matrices X_1, X_2, M_1 et M_2 telles que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ X_1 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & X_2 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Quelle formule sur les déterminants peut-on déduire de cette décomposition ? Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

Exercice 0.10. Pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ on note

$$D_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. On pose $P(X) = D_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, X)$. Montrer que $P(X)$ est un polyôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$, admettant $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ pour racines, et de coefficient dominant égal à $D_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. En déduire P.
2. En déduire par récurrence sur n l'expression de $D_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en fonction des α_i.
3. En déduire que ce déterminant est différent de 0 si et seulement si les α_i sont deux à deux distincts.