Algèbre linéaire et bilinéaire

Examen final - 07 janvier 2016

Durée : 3 heures.

Aucun document (ni calculatrice, téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction.

Exercice 1. On considère un espace vectoriel réel E de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E, on définit pour tous i et j dans $\{1, \ldots, n\}$, l'endomorphisme $\mathcal{E}_{i,j} : E \longrightarrow E$ par $\mathcal{E}_{i,j}(e_k) = e_i$ si $k = j$ et $\mathcal{E}_{i,j}(e_k) = 0$ si $k \neq j$. Montrer que $\{\mathcal{E}_{i,j}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

2. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on considère l'application linéaire $L_u : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $L_u(f) = u \circ f$.

a. Montrer que pout tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $L_{P(u)} = P(L_u)$.

b. En déduire que si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u et L_u ont le même polynôme minimal.

c. En déduire que u est diagonalisable si et seulement si L_u est diagonalisable.

3. Maintenant, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\Phi_u : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ l'application linéaire définie par $\Phi_u(f) = u \circ f - f \circ u$.

On suppose que u est diagonalisable et on note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E qui diagonalise u. On considère alors les endomorphismes $\mathcal{E}_{i,j}$ définis comme à la première question.

a. Montrer que pour tous i et j dans $\{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{E}_{i,j}$ est un vecteur propre de Φ_u (préciser la valeur propre associée).

b. Montrer que Φ_u est diagonalisable.

Exercice 2. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et en préciser les éléments caractéristiques.

Exercice 3. Pour $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on pose

$$q(X) = x^2 - y^2 - 6z^2 - t^2 + 2xy + 2xz + 10yz - 4yt + 6zt.$$

Calculer le rang et la signature de la forme quadratique q.

Exercice 4. Soient f et g deux rotations de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire $f, g \in SO(3)$) différentes de l'identité et commutant entre elles. On notera u un vecteur directeur de l'axe de f.

1. Montrer que $g(u) = u$ ou $g(u) = -u$.

2. On suppose que $g(u) = u$. Montrer que f et g sont deux rotations de même axe.

3. On suppose maintenant que $g(u) = -u$.

a. On note v un vecteur directeur de l'axe de g. Montrer que u et v sont orthogonaux.

b. Montrer que f et g sont deux symétries par rapport à des droites orthogonales.

Exercice 5. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que si $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors il existe $R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = B$.

2. On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que ${}^tAA$ est symétrique et que ses valeurs propres sont non nulles.

b. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire standard et on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. On note f^* l'adjoint de f. Soit λ une valeur propre de $f^* \circ f$ et u un vecteur propre associé. Montrer que $\|f(u)\|^2 = \lambda \|u\|^2$.

c. Montrer que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. En déduire que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in O(n)$ telles que $A = MS$.