Section 4.1

Quand les polynômes deviennent un objet compliqué, mais en fait pas tant que ça...

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'écrit

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad \text{ou encore} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \tag{4.1}$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Mais qui est ce X ? Ce n'est pas une variable. C'est une indéterminée. Une variable intervient dans l'expression d'une fonction et on ne peut lui substituer qu'un élément du domaine de définition de la fonction en question. Par exemple si on considère les fonctions

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + 4x + 2 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \cos(\sqrt{y}) \end{array} \right.$$

la lettre x désigne une variable qu'on peut remplacer par n'importe quel réel, mais rien d'autre, tandis que y est une variable que l'on peut remplacer par n'importe quel réel positif, mais rien d'autre.

L'expression définissant f a également un sens sur $\mathbb{C}$. On peut définir une autre fonction $\tilde{f}$ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\tilde{f}(z) = z^3 + 4z + 2 \in \mathbb{C}$. En fait, cette expression définit une fonction sur n'importe quel espace dans lequel on a défini une addition, une multiplication, et une muliplication par les réels.

Considérons l'ensemble E des fonctions du plan $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, muni de l'addition et de la multiplication par les réels usuelles, ainsi que de la composition. Ainsi $u^2 = u \circ u$, $u^3 = u^2 \circ u$, etc. Par convention on note $u^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$. On peut alors définir la fonction F qui à $u \in E$ associe

$$F(u) = u^3 + 4u + 2 = u \circ u \circ u + 4u + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

$F(u)$ est alors une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Enfin on peut également considérer l'application qui à toute matrice carrée A de taille n fixée et à coefficients dans $\mathbb{R}$ associe la matrice $A^3 + 4A + 2I_n$. Les polynômes de matrices s'avèreront très utiles un peu plus tard...

L'interet de l'indéterminée X est justement d'étudier ce genre de fonctions sans préciser la nature de la variable. L'intérêt est d'une part de traiter d'un seul coup tous les cas, et d'autre part de mettre en valeur le fait que dans tous les résultats de ce chapitre on n'utilisera pas beaucoup de propriétés sur la variable, simplement le fait qu'on sait en définir les puissances, les multiplier par un élément du corps $\mathbb{K}$, et les additionner.

Ainsi on a intérêt à voir un polynôme comme un nouvel objet et pas comme une fonction. Pour satisfaire notre soif de rigueur, il faut donc définir proprement ce nouvel objet, comme il avait fallu définir ce nombre i dont le carré vaut -1. Ici il faut donner un sens à l'indéterminée X. En fait, ce X n'est qu'une notation. L'information importante dans l'expression (4.1) est la famille de coefficients $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Ainsi on pourrait simplement voir un polynôme comme un élément de $\mathbb{K}^{n+1}$. Le problème est que l'entier n dépend lui aussi du polynôme. En effet, un polynôme est donné par un nombre fini mais quelconque de coefficients non nuls. Ainsi on voit plutôt un polynôme comme une suite d'éléments de $\mathbb{K}$ dont seul un nombre fini de coefficients sont non nuls :

Définition. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang (il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_k = 0$ pour tout $k \geqslant N$). Les éléments de $\mathbb{K}[X]$ sont appelés polynômes à une indéterminée sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition. On définit sur $\mathbb{K}[X]$ les opérations suivantes :

- Addition : Pour $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}[X]$ on pose $P + Q = (a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$.
- Multiplication externe : Pour $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose $\lambda \cdot P = (\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$.
- Multiplication interne : Pour $P = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{K}[X]$ on pose $PQ = (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

On peut vérifier que ces trois définitions définissent bien des fonctions de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$, de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$ et de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$, respectivement.

On peut vérifier que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ muni de l'addition précédente est un groupe commutatif, dont l'élément neutre est le polynôme $(0, 0, 0, 0, \dots)$. La multiplication est associative et commutative, et le polynôme $(1, 0, 0, 0, \dots)$ est élément neutre. En outre on a la distributivité du produit par rapport à l'addition :

$$\forall P, Q, R \in \mathbb{K}[X], \quad P(Q + R) = PQ + PR.$$

⚠ $\mathbb{K}[X]$ muni de son addition et de sa multiplication interne n'est pas un corps, car tout élément non nul n'admet pas d'inverse pour la multiplication. Par contre, les propriétés déjà évoquées assurent que c'est ce qu'on appelle un *anneau commutatif*.

Outre ces propriétés concernant l'addition et la multiplication interne, la multiplication externe se comporte également comme on pouvait espérer :
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $1_{\mathbb{K}} P = P$ (où on a noté $1_{\mathbb{K}}$ l'élément unité du corps $\mathbb{K}$).
- Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$.
- Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$.
- Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ on a $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P$.
- Pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda(PQ) = (\lambda P)Q + (\lambda Q)P$.

Toutes les propriétés évoquées font de $\mathbb{K}[X]$ muni de ses trois opérations une $\mathbb{K}$-*algèbre commutative*. A ce stade il n'est pas nécessaire de connaître tout ce vocabulaire, on peut simplement retenir que les calculs se passent bien comme pense, sans oublier qu'un polynôme n'a pas d'inverse en général.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on note $\lambda \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme $(\lambda, 0, 0, 0, \dots)$. On note également $X \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme $(0, 1, 0, 0, \dots)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$X^n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

(où le 1 est le coefficient d'indice n, en $(n + 1)^{\text{ième}}$ position). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ on a

$$(a_0, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

En outre pour $n, m \in \mathbb{N}$ on a $X^n X^m = X^{n+m}$, donc tous les calculs vont bien se passer conformément à ce que la notation suggère. Ouf !

1. On considère $P = 4X^3 + 2X^2 - X + 3$ et $Q = X^2 + X + 1$.
   a. Calculer $P + Q$.
   b. Calculer PQ.

Une fois cette construction rigoureuse effectuée, on n'utilisera quasiment plus jamais la notation sous forme de suite pour un polynôme, mais toujours la notation (4.1).