Mathématiques

Contrôle Continu n°2 - mardi 12 janvier 2016

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Le sujet est long, mais le barème sera adapté. Il n'est pas nécessaire de traiter le sujet dans l'ordre, mais veillez à toujours bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $P = 2X^5 + X^4 + 4X^3 + 2X^2 - 1$ et $Q = X^4 - 1$.
1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q.
2. Écrire la décomposition en facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{2X^5 + X^4 + 4X^3 + 2X^2 - 1}{X^4 - 1}.$$

4. Donner une primitive sur $]1, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto F(x) = \frac{2x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 - 1}.$$

5. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$Q(x)y'(x) + P(x)y(x) = P(x).$$

Exercice 2. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) < f'(b)$. Soit $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$.
1. Montrer que si f' est continue sur $[a, b]$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$.
En considérant par exemple la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ \ x = 0, \end{cases}$$

on peut montrer que f' n'est pas continue en général (question bonus : le démontrer). Le but de cet exercice est maintenant de montrer que même si f' n'est pas continue il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$.
2. Pour $x \in I$ on note $g(x) = f(x) - \lambda x$. Justifier qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que g admet un minimum en x_0.
3. Montrer que $x_0 \in]a, b[$ *(indication : on pourra commencer par calculer $g'(a)$ et $g'(b)$).*
4. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \lambda$.
5. Que peut-on dire si $f'(a) > f'(b)$?
6. Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Pour $t \in [-\pi, \pi]$ on note

$$x(t) = \frac{\sin(2t)}{2} - \sin(t) \quad \text{et} \quad y(t) = 1 - \cos(2t).$$

On considère alors la courbe paramétrée

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
2. En déduire que la courbe admet un point singulier (ou stationnaire) pour $t = 0$. Préciser sans calcul la tangente à γ en 0 et le type de singularité.
3. Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$ les points $\gamma(t)$ et $\gamma(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
4. Écrire le tableau conjoint de variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur $[0, \pi]$.
5. Tracer la courbe γ.

Exercice 4. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que si $f'(x) + f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f tend vers 0 en $+\infty$.
Le but de l'exercice est maintenant d'obtenir la même conclusion en supposant seulement que

$$f'(x) + f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $g(x) = e^x f(x)$.
2. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on a

$$-\frac{\varepsilon e^x}{2} \leqslant g'(x) \leqslant \frac{\varepsilon e^x}{2}$$

4. Montrer que pour tout $x \geqslant A$ on a alors

$$g(x) - g(A) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A)$$

(indication : on pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto g(x) - \frac{\varepsilon}{2} e^x$). On admet qu'on peut vérifier de la même façon que

$$g(x) - g(A) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A).$$

En déduire que pour $x \geqslant A$ on a

$$|g(x) - g(A)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^A).$$

5. Montrer que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$