Université Paul Sabatier **FSI** **L1 Special** **Année 2015-2016**

Contrôle n°1 de mathématiques

5 novembre 2015. Durée : 2h

Calculatrices, documents et téléphones portables interdits.

Exercice 1 En calculant $(1+i)(\sqrt{3}+i)$ de deux façons différentes, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Correction : On a d'une part

$$(1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1 = (\sqrt{3}-1)+i(\sqrt{3}+1),$$

et d'autre part

$$(1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires on obtient

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

□

Exercice 2

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappeler les dérivées des fonctions $x \mapsto \cos(\lambda x)$ et $x \mapsto \sin(\lambda x)$.
2. Linéariser $\cos^3(x)$, et en déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^3(x)$.
3. Résoudre l'équation différentielle

$$y'(x) - \cos^3(x)y(x) = 2\cos^3(x)$$

Correction :

1. Les dérivées de $x \mapsto \cos(\lambda x)$ et $x \mapsto \sin(\lambda x)$ sont respectivement $x \mapsto -\lambda\sin(\lambda x)$ et $x \mapsto \lambda\cos(\lambda x)$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(x)^3 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos(3x)+3\cos(x)\right).$$

Un primitive de la fonction $x \mapsto \cos(x)^3$ est donc

$$A : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3\sin(x)}{4}.$$

3. Les solutions de l'équation homogène $y'(x) - \cos^3(x)y(x) = 0$ sont les fonctions de la forme $Ce^{A(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$. La fonction constante égale à -2 est solution évidente, donc finalement les solutions sont les fonctions de la forme
$$C \exp\left(\frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3\sin(x)}{4}\right) - 2,$$
avec $C \in \mathbb{R}$.

$\square$

Exercice 3 Résoudre l'équation

$$y'' + y' + y = e^x.$$

Correction : On commence par résoudre l'équation caractéristique

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 1 - 4 = -3$, donc les solutions sont $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de l'équation homogène
$$y'' + y' + y = 0$$
sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right),$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Il est relativement facile de voir que $x \mapsto \frac{e^x}{3}$ est une solution particulière (sinon on sait qu'on peut chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto \alpha e^x$, et en réinjectant dans l'équation on obtient que $\alpha = \frac{1}{3}$). Ainsi les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + \frac{e^x}{3},$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Remarque : Puisque cela n'était pas précisé, il était également possible de résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$. $\square$

Exercice 4 Soit $n \geq 2$. On considère l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n \tag{$*$}$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Par un argument géométrique, montrer que toute solution de $(*)$ est imaginaire pure.
2. Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$.

3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \pi\,[2\pi]$ on a

$$\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

4. Résoudre $(*)$.

<u>Correction :</u>

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de $(*)$. On a $|z-1|^n = |z+1|^n$, soit $|z-1| = |z+1|$ (car ce sont des quantités positives). Cela signifie que le point d'affixe z est à égale distance du point d'affixe 1 et du point d'affixe -1, et donc sur l'axe imaginaire. Cela prouve que z est imaginaire pur.
2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = 1$ est l'ensemble des $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
3. *L'erreur d'énoncé est corrigée dans cette version.* Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2}}{\frac{i\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{2i}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ on obtient bien

$$\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}.$$

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de $(*)$. On note $w = \frac{z+1}{z-1}$. On a alors $w^n = 1$. Ainsi il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $w = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. En outre $w \neq 1$, donc $k \in [\![1, n-1]\!]$. D'autre part on a $w(z-1) = z+1$ donc

$$z = \frac{w+1}{w-1} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}.$$

Inversement, supposons qu'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $z = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$. Alors on a

$$(z+1)^n = \left(\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)^n = \frac{e^{ik\pi}}{i^n\sin^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{(-1)^k}{i^n\sin^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)},$$

et de même

$$(z-1)^n = \left(\frac{e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}\right)^n = \frac{e^{-ik\pi}}{i^n\sin^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = \frac{(-1)^k}{i^n\sin^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)},$$

d'où z est solution de $(*)$. Finalement l'ensemble des solutions de $(*)$ est l'ensemble des

$$\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}, \quad \text{pour } k \in [\![1, n-1]\!].$$

$\square$

Exercice 5

Soient f une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que f tend vers l en $+\infty$. On rappelle que cela signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x > A, \quad |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

1. Soient g une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ qui tend vers $m \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} l + m.$$

(il s'agit de démontrer un résultat énoncé en cours)

2. On suppose désormais que f est continue à valeurs dans $[0, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.
   (a) Montrer que f admet un maximum.
   (b) En donnant un contre-exemple, montrer que f n'admet pas nécessairement de minimum.

Correction :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $x \in]A_1, +\infty[$ on a

$$|f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même il existe $A_2 > 0$ tel que pour $x \in]A_2, +\infty[$ on a

$$|g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $A = \max(A_1, A_2)$. Pour $x \in]A, +\infty[$ on a

$$\big|(f(x) + g(x)) - (l + m)\big| = \big|(f(x) - l) + (g(x) - m)\big| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l + m.$$

2. (a) Si la fonction f est nulle, alors elle atteint son maximum en tout point. On suppose maintenant que f n'est pas nulle. Il existe donc $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) > 0$. Puisque f tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A \in]0, +\infty[$ tel que

$$\forall x \in]A, +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2}.$$

On a nécessairement $A \geq x_0$. La fonction f est continue sur le segment $[0, A]$, donc elle est bornée sur ce segment et atteint son maximum en un point $x_1 \in [0, A]$. Cela implique en particulier que $f(x_1) \geq f(x_0)$. Mais pour $x \in]A, +\infty[$ on a

$$f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} \leq f(x_1).$$

Ainsi on a $f(x) \leq f(x_1)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Cela signifie que f atteint son maximum en x_1.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on note

$$f(x) = e^{-x}.$$

Cela définit une fonction f continue, qui ne prend que des valeurs positives, qui tend vers 0 en $+\infty$ et qui, pourtant, n'admet pas de minimum. En effet, cette fonction f est strictement décroissante, donc pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$ on peut trouver $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) < f(x_0)$ (il suffit de choisir n'importe quel $x \in]x_0, +\infty[$).

□