Calcul Différentiel et Intégral

Examen final - Mardi 13 janvier 2015

Durée : 2h

Aucun document (ni calculatrice, ni téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter les questions dans l'ordre, mais veillez à bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

Exercice 1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ on note

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction ainsi obtenue (on la note toujours f) est-elle différentiable ?

Exercice 2. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f(x,y) = \left|4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39\right|.$$

Déterminer les extrema locaux et globaux de f.

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^2$ le domaine D délimité par les courbes d'équations $x = \frac{y^2}{4}$ et $y = 2x$.
1. Calculer l'aire de D.
2. Calculer l'intégrale

$$\iint_D (y-x)\, dx\, dy.$$

3. On note $\mathcal{C}$ le bord de D orienté de sorte à laisser D sur sa gauche. Calculer l'intégrale $\int_{\mathcal{C}} y^2\, dx + xy\, dy$
a. directement,
b. puis par la formule de Green-Riemann.

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le domaine D délimité par les surfaces d'équations $z = 25 - x^2 - y^2$ et $z = 9$. Calculer le volume de D.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble Σ d'équation

$$f(z) = y - xz.$$

1. Montrer qu'au voisinage du point (0,0,0) l'ensemble Σ est également défini par une équation de la forme

$$z = \varphi(x,y),$$

où φ est une fonction de classe C^1.
2. Montrer qu'au voisinage de (0,0) on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $K \in [0, 1[$ tel que $|f'(t)| \leqslant K$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x + f(y) \\ y + f(x) \end{pmatrix}.$$

Montrer que F réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1. On commence par observer que la fonction f est de classe C^∞ (et donc en particulier continue et différentiable) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction fationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.
1. Pour tous $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\left|f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)\right| = \frac{r^3\,|\cos(\theta)|\sin(\theta)^2}{r^2} \leqslant r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Cela prouve que f tend vers 0 en (0,0). Ainsi on peut prolonger f par continuité en posant $f(0,0) = 0$. On pouvait également observer que $0 \leqslant y^2 \leqslant x^2 + y^2$ et donc

$$|f(x,y)| \leqslant |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

2. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$ on a $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Cela implique que les dérivées partielles de f existent en (0,0) et sont nulles. Ainsi, si f est différentiable en (0,0), sa différentielle est nécessairement nulle. Ainsi pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ la dérivée de f en (0,0) et dans la direction v est nulle. Or pour $v = (1,1)$ on a

$$\frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0.$$

D'où la contradiction. On a prouvé que f n'est pas différentiable en (0,0). Ainsi l'ensemble des points en lesquels f est différentiable est $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 2. On observe que

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39 = 4(x-1)^2 + 9(y+2)^2 - 1.$$

On note

$$\mathcal{Z} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 39 = 0\right\}$$

Ainsi $\mathcal{Z}$ est une ellipse centrée en (1,-2). Pour tout $(x,y) \in \mathcal{Z}$ on a $f(x,y) = 0$, et pour $(x,y) \notin \mathcal{Z}$ on a $f(x,y) > 0$, donc f atteint son minimum global (et donc un minimum local) en tout point de $\mathcal{Z}$. On peut voir directement que f admet un unique maximum local (qui n'est pas global) au centre de l'ellipse $\mathcal{Z}$, mais on va le vérifier par la méthode usuelle. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Z}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Z}$ on a

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 8x - 8 = 0 \\ 18y + 36 = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (1,-2).$$

Ainsi f admet un unique point critique en (1,-2). En ce point on a

$$\operatorname{Hess} f(1,-2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

On a $\det \operatorname{Hess} f(1,-2) > 0$ et $\operatorname{Tr} \operatorname{Hess} f(1,-2) > 0$ donc f admet un maximum local en (-1,2). En outre ce n'est pas un maximum global car $f(x,0)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 3. (Faire un dessin !)
1. On a

$$\text{Aire}(D) = \int_{y=0}^{2} \left(\int_{x=\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} 1\,dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} \right) dy = \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12} \right]_0^2 = \frac{1}{3}.$$

2. On a

$$\iint_D (y-x)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=2x}^{2\sqrt{x}} (y-x)\,dy\right)dx = \int_0^1 \left(2x - 2x^{\frac{3}{2}}\right)\,dx = \frac{1}{5}.$$

Pour ces deux calculs il était possible d'intégrer d'abord en x ou en y.
3. a. On paramètre $\mathcal{C}$ par

$$\gamma_1 : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t,2t) \end{array}\right. \qquad \text{et} \quad \gamma_2 : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t,2\sqrt{t}) \end{array}\right.$$

On a alors

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + xy\,dy = \int_{\gamma_1} y^2\,dx + xy\,dy - \int_{\gamma_2} y^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 (4t^2+4t^2)\,dt - \int_0^1 (4t+2t)\,dt = \frac{8}{3} - 3 = -\frac{1}{3}.$$

b. D'après la formule de Green-Riemann on a

$$\int_{\mathcal{C}} y^2\,dx + xy\,dy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=2x}^{2\sqrt{x}} (y-2y)\,dy\,dx = \int_0^1 (-2x+2x^2)\,dx = -\frac{1}{3}.$$

Exercice 4. En passant aux coordonnées cylindriques on obtient

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_{z=9}^{25}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{25-z}} r\,dr\,d\theta\,dz = 2\pi\int_9^{25}\frac{25-z}{2} = 2\pi\left[-\frac{(25-z)^2}{4}\right]_9^{25} = 128\pi.$$

Exercice 5. **1.** Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on note

$$g(x,y,z) = f(z) - y + xz.$$

Alors g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ comme somme de fonctions C^1. En outre on a $(x,y,z)\in\Sigma$ si et seulement si $g(x,y,z)=0$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0,0,0) = f'(0) \neq 0,$$

donc d'après le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de (0,0) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction φ de classe C^1 de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ tels que pour tout $(x,y,z)\in\mathcal{U}\times\mathcal{V}$ on a

$$(x,y,z)\in\Sigma \iff g(x,y,z)=0 \iff z=\varphi(x,y).$$

2. Pour tout $(x,y)\in\mathcal{U}$ on a

$$f(\varphi(x,y)) - y + x\varphi(x,y) = 0.$$

En dérivant par rapport à x on obtient

$$f'(\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) + \varphi(x,y) + x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 0,$$

tandis qu'en dérivant par rapport à y :

$$f'(\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) - 1 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 0.$$

En multipliant cette dernière égalité par $\varphi(x,y)$ et en ajoutant la précédente on obtient

$$(f'(\varphi(x,y)) + x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) + \varphi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right) = 0.$$

On a $f'(\varphi(0,0)) + 0 = f'(0) \neq 0$, donc par continuité il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall (x,y) \in \tilde{\mathcal{U}}, \quad f'(\varphi(x,y)) + x \neq 0.$$

Pour tout $(x,y) \in \tilde{\mathcal{U}}$ on a alors

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + \varphi(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 6. Les fonctions $(x,y) \mapsto x + f(y)$ et $(x,y) \mapsto y + f(x)$ sont de classe C^1 comme sommes de fonctions de classe C^1. Ainsi F est de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\operatorname{Jac} F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\det\big(\operatorname{Jac} F(x,y)\big) = 1 - f'(x)f'(y).$$

Or $|f'(x)|\ |f'(y)| \leqslant K^2 < 1$, donc $\det\big(\operatorname{Jac} F(x,y)\big) \neq 0$. Ainsi F réalise un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$. Montrons que F réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$G(x,y) = (x,y) - F(x,y) + (u,v) = \big(u - f(y), v - f(x)\big).$$

La fonction G ainsi définie est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (qui est un fermé de $\mathbb{R}^2$). Pour $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ on a par l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned}
\|G(x_1,y_1) - G(x_2,y_2)\|_\infty &\leqslant \max\big(\,|f(y_2) - f(y_1)|\,, |f(x_2) - f(x_1)|\,\big) \\
&\leqslant K \max\big(\,|y_2 - y_1|\,, |x_2 - x_1|\,\big) \\
&\leqslant K\,\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_\infty\,.
\end{aligned}$$

Ainsi G est une fonction contractante sur $\mathbb{R}^2$. Par le théorème du point fixe, on obtient qu'il existe un unique (x,y) tel que $G(x,y) = (x,y)$, ce qui est équivalent à $F(x,y) = (u,v)$. Cela prouve que F est une bijection de $\mathbb{R}^2$. Par le théorème de l'inversion globale, on obtient que F réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Commentaires

- Pour la question 1 de l'exercice 1, il est bon de commencer par dire que f est bien continue là où elle est définie. Pour la limite en (0,0), dire que $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ tend vers 0 quand r tend vers 0 ne suffit pas. Il faut que ce soit uniforme en θ. Cela signifie qu'il faut majorer $|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))|$ (avec la valeur absolue !) par une quantité qui NE DEPEND PAS de θ et qui tend vers 0 quand r tend vers 0. L'erreur est d'autant plus regrétable qu'il n'y avait aucun piège ici et que la question était supposée donner des points faciles.
- Pour la deuxième question de l'exercice 1, on ne peut pas conclure en disant que f n'est pas C^1. En effet une fonction C^1 est différentiable, mais une fonction qui n'est pas C^1 peut tout de même être différentiable. En particulier on remarque dans le corrigé qu'il est inutile ici de calculer les dérivées partielles de f en tout point, et qu'il est en fait plus pénible de montrer que f n'est pas C^1 que de montrer qu'elle n'est pas différentiable.
- Dans l'exercice 2, il y a une valeur absolue... Et il y avait déjà le même piège au partiel ! Est-il utile de rappeler que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, et que la fonction f n'admet donc pas de gradient en tout point ? En particulier f peut admettre un extremum local en un point qui n'est pas un point critique (d'ailleurs, ici, tout point ou f s'annule est un minimum global sans être un point critique). Il est particulièrement regrétable que vous n'ayez pas vu le problème en calculant effectivement le gradient de f. Les formules obtenues sont évidemment farfelues (même là où f admet bien un gradient...). La maîtrise de la technique du cours sera valorisée mais ce n'était pas suffisant ici.
- Il n'y avait aucun piège dans l'exercice 3, en particulier il n'y avait pas de difficulté spéciale pour paramétrer le contour de ce domaine défini par deux graphes de fonctions simples. Ca aurait dû être un exercice sans histoire. Un demi-point de bonus a été attribué pour le dessin du domaine, même s'il n'était pas explicitement demandé.
- L'exerice 5 a été très mal compris. L'égalité $f(z) = y - xz$ est une équation définissant une partie de $\mathbb{R}^3$, pas la définition de f, qui est une fonction d'une seule variable réelle. En particulier cela n'a pas de sens de calculer des dérivées partielles pour f. Pour la plupart vous avez compris que c'était un exercice sur le théorème des fonctions implicites, mais sans réfléchir à la fonction à laquelle l'appliquer (certainement pas à f, qui n'est toujours qu'une fonction d'une seule variable réelle).
- L'erreur classique sur l'exercice 6 a été de vérifier l'hypothèse du théorème de l'inversion LOCALE et d'en déduire la conclusion du théorème de l'inversion GLOBALE...