Quelques corrections ou indications

Table des matières

2 TD2 - Réduction des endomorphismes

Exercice 8

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe un unique couple $(B,R) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\deg(R) < \deg(Q)$ et $P = BQ + R$. Alors on a $f(P) = R$. En particulier $\deg(f(P)) < \deg(Q) \leqslant n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Soient maintenant $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $B_1, B_2, R_1, R_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(R_1) < \deg(Q)$, $\deg(R_2) < Q$, $P_1 = B_1 Q + R_1$ et $P_2 = B_2 W + R_2$. Alors on a

$$\lambda P_1 + P_2 = (\lambda B_1 + B_2)Q + (\lambda R_1 + R_2).$$

Comme

$$\deg(\lambda R_1 + R_2) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < Q,$$

on a

$$f(\lambda P_1 + P_2) = \lambda R_1 + R_2 = \lambda f(P_1) + f(P_2).$$

Cela prouve que f est linéaire, et définit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2.

Exercice 10

1. D'après le théorème du rang on a

$$\dim(H) = \dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f - \mathrm{Id}_E) = n - 1.$$

2. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha \in K$ tels que

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + \alpha e = 0.$$

Supposons par l'absurde que $\alpha \neq 0$. Alors on a $\alpha e \notin H$ (si $\alpha e \in H$ alors $e = \alpha^{-1}(\alpha e) \in H$, ce qui n'est pas vrai). D'autre part

$$\alpha e = -\alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_p e_p \in H.$$

C'est absurde, donc $\alpha = 0$. Ainsi $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p = 0$. Mais la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de H, donc en particulier une famille libre. Cela prouve que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Finalement la famille $(e_1, \dots, e_p, e)$ est libre. En outre elle contient n éléments (car $p = \dim(H) = n - 1$), donc c'est une base de E.
3. Soit $(a_1, \dots, a_p, a) \in K^n$ tel que $f(e) = a_1 e_1 + \cdots + a_p e_p + ae$. Puisque $f(e_j) = e_j$ pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la matrice de f dans la base $(e_1, \dots, e_p, e)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & & & (0) & a_1 \\ & \ddots & & & a_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & a_p \\ (0) & & & & a \end{pmatrix}$$

En particulier $\det(f) = a$. Et par suite

$$f(e) - \det(f)e = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j \in H.$$

4. Comme $f(e_j) - \det(f)e_j = e_j - \det(f)e_j \in H$ on a $\mathrm{Im}(f - \det(f)\,\mathrm{Id}_E) \subset H = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, et donc $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f - \det(f)\,\mathrm{Id}_F) = 0$. Cela signifie que $(X-1)(X-\det(f))$ est un polynôme annulateur de f. Si $\det(f) \neq 1$, alors f admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc f est diagonalisable. Si $\det(f) = 1$, alors 1 est la seule valeur propre de f. Or $\ker(f - \mathrm{Id}_E) \neq E$, donc f n'est pas diagonalisable. Finalement f est diagonalisable si et seulement si $\det(f) \neq 1$.