Examen Partiel - 06 novembre 2014

Durée : 2 heures.

Aucun document (ni calculatrice, téléphone, etc.) n'est autorisé. On accordera un soin particulier à la rédaction. Il n'est pas nécessaire de traiter les questions dans l'ordre, mais veillez à bien préciser le numéro de la question à laquelle vous répondez.

La question 3 de l'exercice 3 sera hors-barême.

Exercice 1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 2. Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_a = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique P_{M_a} de M_a. Donner l'ensemble des valeurs propres de f_a.
2. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?
3. On suppose dans cette question que $a = -1$.
  a. Diagonaliser la matrice M_{-1} en précisant la matrice de passage.
  b. Donner le polynôme minimal de f_{-1}.
  c. Résoudre le système différentiel $X'(t) = M_{-1}X(t)$.
4. On suppose dans cette question que $a = 1$.
  a. Calculer les sous-espaces caractéristiques de f_1.
  b. Trigonaliser M_1 en précisant la matrice de passage.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $u, v \in L(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$ et que v est nilpotent. On veut montrer que

$$\det(u + v) = \det(u).$$

1. a. Donner le polynôme caractéristique de v.
  b. En déduire le résultat dans le cas où $u = \mathrm{Id}_E$.
2. a. Montrer que si u est inversible alors $u^{-1}v$ est nilpotent.
  b. Montrer le résultat dans le cas où u est inversible.
3. a. Dans le cas général, montrer qu'il existe une infinité de réels θ tels que $u - \theta\,\mathrm{Id}_E$ est inversible.
  b. En déduire qu'il existe une infinité de réels θ tels que $\det(u + v - \theta\,\mathrm{Id}_E) = \det(u - \theta\,\mathrm{Id}_E)$.
  c. Conclure.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $u \in L(E)$ tel que $u^4 = u^2$. Montrer que si 1 et -1 sont valeurs propres de u alors u est diagonalisable.

$\boxed{\text{Corrigé}}$

Exercice 1. On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -4 \\ 1 & 5-X \end{vmatrix} = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2.$$

Ainsi 3 est la seule valeur propre de A. Comme $A \neq 3I_2$, A n'est pas diagonalisable (on peut également vérifier que $\ker(A - 3I_2)$ est de dimension 1 pour conclure).

Exercice 2. 1. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & a+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & a-X \end{vmatrix} &=_{[C_1 \leftarrow C_1 + C_2]} \begin{vmatrix} -1-X & 0 & a+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & a-X \end{vmatrix} \\
&=_{[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]} -(X+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & a+1 \\ 0 & -2-X & -(a+1) \\ 0 & 1 & a-X \end{vmatrix} \\
&= -(X+1)\big(X^2 + (2-a)X + (1-a)\big).
\end{aligned}$$

Les racines de $X^2 + (2-a)X + (1-a)$ sont -1 et $a-1$, donc

$$\chi_A(X) = -(X+1)^2(X - a + 1).$$

2. On calcule $\ker(A + I_3)$. Si $a \neq -1$ on a $\ker(A + I_3) = \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si $a = -1$ on a $\ker(A + I_3) = \operatorname{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Ainsi, si $a \neq -1$ alors la matrice M_a n'est pas diagonalisable car -1 est au moins racine double de $\chi_A(X)$ alors que $\dim(\ker(A+I_3)) = 1$. Si $a = -1$ alors -1 est racine double de $\chi_A(X)$ et $\dim(\ker(A + I_3)) = 2$ donc M_a est diagonalisable. Finalement l'endomorphisme f_a est diagonalisable si et seulement si $a = -1$.

3. a. Pour $a = -1$ on rappelle que M_{-1} est diagonalisable et que -1 est valeur propre de multiplicité 2. L'autre valeur propre (simple) est -2. On a $\ker(A+2I_3) = \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Ainsi on a

$$M_{-1} = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. Comme f_{-1} est diagonalisable de valeurs propres -1 et -2, son polynôme minimal est nécessairement $(X+1)(X+2)$.

c. Soit X une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $V(t) = P^{-1}X(t)$. Comme P^{-1} ne dépend pas de t on a

$$X'(t) = M_{-1}X \iff X'(t) = PDP^{-1}V(t) \iff V'(t) = DV(t).$$

Or les solutions de $V'(t) = DV(t)$ sont les fonctions de la forme

$$V(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta e^{-t} \\ \gamma e^{-t} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Ainsi les solutions de $X'(t) = M_{-1}X(t)$ sont les fonctions de la forme

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta e^{-t} \\ \gamma e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{-t} \\ \alpha e^{-t} + \gamma e^{-2t} \\ \beta e^{-t} - \gamma e^{-2t} \end{pmatrix},$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
4. a. Pour $a = 1$ on a $\chi_{M_1}(X) = -X(X+1)^2$. On a

$$\ker(A) = \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

et

$$\ker((A + I_3)^2) = \operatorname{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $(A + I_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a

$$M_1 = PJP^{-1} \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. **1.** a. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent sur un espace de dimension n est $(-X)^n$.

b. On a

$$\det(\mathrm{Id}_E + v) = \chi_v(-1) = (-(-1))^n = 1 = \det(\mathrm{Id}_E),$$

ce qui donne l'égalité attendue pour $u = \mathrm{Id}_E$.
2. a. En composant à gauche et à droite l'égalité $u \circ v = v \circ u$ par u^{-1}, on obtient que u^{-1} et v commutent. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a donc $(u^{-1}v)^k = (u^{-1})^k v^k$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $v^k = 0$. Pour un tel k on a aussi $(u^{-1}v)^k = 0$, donc $u^{-1}v$ est nilpotent.

b. En utilisant le résultat de la question précédente appliqué à $u^{-1}v$ on obtient

$$\det(u + v) = \det(u) \det(\mathrm{Id}_E + u^{-1}v) = \det(u).$$

3. a. Si $\theta \in \mathbb{R}$ n'est pas valeur propre de u, alors $u - \theta \mathrm{Id}_E$ est injectif et donc inversible. Puisque u admet au plus n valeurs propres, il y a une infinité de θ réels qui ne sont pas valeur propre de u.

b. D'après la question 2 appliquée avec $u - \theta \mathrm{Id}_E$ au lieu de u on obtient bien que pour une infinité de θ réels on a

$$\det(u - \theta \mathrm{Id}_E + v) = \det(u - \theta \mathrm{Id}_E).$$

c. Pour une infinité de réels θ on a $\chi_{u+v}(\theta) = \chi_u(\theta)$. Or deux polynômes qui coïncident pour une infinité de points sont égaux, donc $\chi_{u+v} = \chi_u$. En particulier

$$\det(u+v) = \chi_{u+v}(0) = \chi_u(0) = \det(u).$$

Exercice 4. Le polynôme $P = X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ annule u donc le polynôme minimal μ_u de u divise P. D'autre part -1 et 1 sont racines de μ_u, donc $(X-1)(X+1)$ divise μ_u. Ainsi il existe $k \in \{0,1,2\}$ tel que

$$\mu_u(X) = X^k(X-1)(X+1).$$

Comme E est de dimension 3, on obtient par le théorème de Cayley-Hamilton que $\deg(\mu_u) \leqslant 3$. Ainsi on a $k = 0$ ou $k = 1$. Dans les deux cas, le polynôme minimal de u est scindé à racines simples, ce qui implique que u est diagonalisable.