Table des matières

2 Équations de transport. **1**
Exercice 7 1
Exercice 9 1

3 Examen Partiel **2**
Exercice 3 2
Exercice 4 3

2 Équations de transport.

Exercice 7

1. On commence par observer que v est localement lipschitzienne, donc la théorie de Cauchy-Lipschitz s'applique à l'équation $y'(t) = v(t, y(t))$. En outre, les fonctions constantes égales à 0 ou à 1 sont solutions. Ainsi les caractéristiques issues de 0 ou 1 sont définies sur tout $\mathbb{R}$ et sont constantes. Autrement dit, pour tous $t, t_0 \in \mathbb{R}$ on a

$$X(t; t_0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad X(t; t_0, 1) = 1.$$

Soit maintenant $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times]0, 1[$. La caractéristique $t \mapsto X(t; t_0, x_0)$ est définie sur un intervalle maximal $]T_*, T^*[$ avec $-\infty \leqslant T_* < T^* \leqslant +\infty$. Par unicité, les caractéristiques n'atteignent jamais les points 0 ou 1. Par continuité on a donc

$$\forall t \in]T_*, T^*[, \quad X(t; t_0, x_0) \in]0, 1[.$$

D'après le théorème de sortie des compacts, on a nécessairement $T_* = -\infty$ et $T^* = +\infty$.
2. Comme les caractéristiques $t \mapsto X(t; t_0, x_0)$ sont toutes définies sur tout $\mathbb{R}$ (et en particulier elles sont bien définies jusqu'en 0, le même raisonnement que celui utilisé pour résoudre le problème analogue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ montre que le problème (11) admet une unique solution donnée par

$$u : (t, x) \mapsto u_0(X(0; t, x)).$$

Exercice 9

On suppose que u est solution sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour tout $(s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on note

$$\tilde{u}(x, y) = u(s, y + cs).$$

La fonction $\tilde{u}$ ainsi définie est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et pour tout $(s, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$\partial_s \tilde{u}(s, y) = \tilde{u}(s, y)^2.$$

En outre pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{u}(0, y) = u(0, y) = u_0(y)$. La fonction nulle est solution de l'équation $v' = v^2$, donc toute solution non identiquement nulle est partout non nulle. En particulier, pour $y \in \mathbb{R}$ on a $\tilde{u}(0, y) \neq 0$ donc $\tilde{u}(s, y) \neq 0$ pour tout $s \geqslant 0$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{1}{\tilde{u}(s, y)}\right) = \frac{\partial_s \tilde{u}(s, y)}{\tilde{u}(s, y)^2} = 1,$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{\tilde{u}(s, y)} = s - \frac{1}{u_0(y)},$$

ou encore

$$\tilde{u}(s,y) = \frac{u_0(y)}{1 - s u_0(y)}.$$

Finalement, on obtient que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$u(t,x) = \tilde{u}(t, x - ct) = \frac{u_0(x - ct)}{1 - t u_0(x - ct)}.$$

Cela prouve l'unicité d'une solution. Enfin on vérifie facilement que la solution u ainsi définie est bien solution du problème. Il y a donc bien existence et unicité d'une solution sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

On suppose que u est solution sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ pour un certain $T > 0$. Pour $(x,y) \in [0,T[\times\mathbb{R}$ on définit $\tilde{u}(s,y)$ comme précédemment. On a toujours $\partial_s \tilde{u} = \tilde{u}^2$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme précédement on obtient que pour tout $s \in [0,T[$ on a

$$\tilde{u}(s,y) = \frac{u_0(y)}{1 - s u_0(y)}.$$

Cela implique que $T \leqslant \frac{1}{u_0(y)}$. Comme cette inégalité doit être vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a nécessairement

$$T \leqslant T^* := \frac{1}{\sup_{\mathbb{R}} u_0}.$$

Cette condition vérifiée, on obtient la même expression qu'à la question précédente pour u sur $[0,T[\times\mathbb{R}$. Finalement on obtient qu'il existe une unique solution sur $[0,T^*[\times\mathbb{R}$ et que cette solution est maximale, au sens où il n'existe pas de solution sur $[0,T[\times\mathbb{R}$ si $T > T^*$.

3 Examen Partiel

Exercice 3

1. La fonction c est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (comme produit de fonctions usuelles) donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$ le problème de Cauchy (EDO) admet une solution maximale.

2. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $\phi(t) = k\pi$. Alors on a $\phi(t_0) = k\pi$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(t) = 0 = \sin(t)\sin(\phi(t)).$$

Cela prouve que les fonctions ϕ et $X(\cdot;t_0,k\pi)$ coïncident sur l'intersection de leur domaines de définition. Mais ϕ est définie sur $\mathbb{R}$ et $X(\cdot;t_0,k\pi)$ est solution maximale de (EDO), donc $X(t;t_0,k\pi)$ est définie et vaut $k\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit maintenant $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $x_0 = k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, on vient de voir que $X(\cdot;t_0,x_0)$ est une solution globale. On suppose maintenant qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 \in]k\pi,(k+1)\pi[$. Par unicité des solutions pour l'équation $u' = c(u)$, on a $X(t;t_0,x_0) \in]k\pi,(k+1)\pi[$ pour tout $t \in]T_*,T^*[$. Par le théorème de sortie des compacte, cette solution est définie sur tout $\mathbb{R}$.

3. Soit $(t_0,x_0) \in \mathbb{R}^2$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note

$$f(t) = X(t;t_0,x_0+2\pi) \quad \text{et} \quad g(t) = X(t;t_0,x_0) + 2\pi.$$

Alors on a $f(t_0) = x_0 + 2\pi = g(t_0)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = c(t, f(t))$$

et

$$g'(t) = \partial_t X(t;t_0,x_0) = \sin(t)\sin\big(X(t;t_0,x_0)\big) = \sin(t)\sin\big(X(t;t_0,x_0) + 2\pi\big) = c(t,g(t)).$$

Ainsi f et g sont solutions du même problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = c(t, y), \\ y(t_0) = x_0 + 2\pi. \end{cases}$$

Par unicité, ces deux fonctions coïncident donc sur $\mathbb{R}$. On montre de la même façon la deuxième égalité, en utilisant l'imparité de la fonction sinus. Finalement, on connait les solutions de (EDO) sur $\pi\mathbb{Z}$, donc il suffit de restreindre l'étude à $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Par 2π-périodicité, il suffit de s'intéresser à $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, et enfin par imparité on peut se contenter de l'étude sur $]0, \pi[$.

4. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in]0, \pi[$. On rappelle que $X(t; t_0, x_0) \in]0, \pi[$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln\left(\tan\left(\frac{X(t;t_0,x_0)}{2}\right)\right) &= \frac{1}{\tan\left(\frac{X(t;t_0,x_0)}{2}\right)} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{X(t;t_0,x_0)}{2}\right)} \frac{\partial_t X(t;t_0,x_0)}{2} \\ &= \frac{\sin(t)\sin\big(X(t;t_0,x_0)\big)}{2\sin\left(\frac{X(t;t_0,x_0)}{2}\right)\cos\left(\frac{X(t;t_0,x_0)}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin(t)\sin\big(X(t;t_0,x_0)\big)}{\sin\big(X(t;t_0,x_0)\big)} \\ &= \sin(t). \end{aligned}$$

Après intégration on obtient

$$\ln\left(\tan\left(\frac{X(t;t_0,x_0)}{2}\right)\right) = \ln\left(\tan\left(\frac{x_0}{2}\right)\right) - \cos(t) + \cos(t_0),$$

et finalement

$$X(t;t_0,x_0) = 2\arctan\left(\tan\left(\frac{x_0}{2}\right)e^{\cos(t_0)-\cos(t)}\right).$$

Exercice 4

1. La première égalité est vérifiée par définition de v. D'autre part on a

$$\partial_t v + c\partial_x v = \partial_{tt} u - c\partial_{tx} u + c\partial_{xt} u - c^2 \partial_{xx} u.$$

D'après le théorème de Schwarz on a $\partial_{tx} u = \partial_{xt} u$ et donc

$$\partial_t v + c\partial_x v = \partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = 0.$$

On en déduit que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$v(t,x) = v(0, x-ct) = (\partial_t u)(0, x-ct) - c(\partial_x u)(0, x-ct) = u_1(x-ct) - cu_0'(x-ct),$$

puis

$$\begin{aligned} u(t,x) &= u_0(x+ct) + \int_0^t v(\tau, x + c(t-\tau))\, d\tau \\ &= u_0(x+ct) + \int_0^t \big(u_1(x + c(t-2\tau)) - cu_0'(x + c(t-2\tau))\big)\, d\tau \\ &= u_0(x+ct) + \int_0^t u_1(x + c(t-2\tau))\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tau}\big(u_0'(x + c(t-2\tau))\big)\, d\tau \\ &= \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2}\int_{-t}^t u_1(x + c\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

2. D'après la question précédente, le problème $(*)$ admet au plus une solution. Pour prouver l'existence, il suffit de vérifier que la fonction u obtenue est effectivement solution. Pour cela on calcule, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t u(t,x) = \frac{c}{2}\big(u_0'(x+ct) - u_0'(x-ct)\big) + \frac{1}{2}\big(u_1(x+ct) - u_1(x-ct)\big),$$

$$\partial_{tt} u(t,x) = \frac{c^2}{2}\big(u_0''(x+ct) + u_0''(x-ct)\big) + \frac{c}{2}\big(u_1'(x+ct) + u_1'(x-ct)\big),$$

et d'autre part, par dérivation sous l'intégrale :

$$\begin{aligned}\partial_x u(t,x) &= \frac{1}{2}\big(u_0'(x+ct) + u_0(x-ct)\big) + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} u_1'(x+c\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}\big(u_0'(x+ct) + u_0(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\big(u_1(x+ct) - u_1(x-ct)\big),\end{aligned}$$

$$\partial_{xx} u(t,x) = \frac{1}{2}\big(u_0''(x+ct) + u_0''(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\big(u_1'(x+ct) + u_1'(x-ct)\big).$$

Cela prouve que u est bien solution de $(*)$.

3. Étant donnée l'expression obtenue pour la solution u, il apparait que pour tout $t > 0$ l'application $x \mapsto u(t,x)$ sera à support dans $[-R-ct, R+ct]$ si u_0 et u_1 sont à supports dans $[-R,R]$.