TD n° 3 :

Espaces de Sobolev

Exercice 3.1. Soient a et b des fonctions de classe C^1 sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$ respectivement. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A quelle condition la fonction

$$u : x \mapsto \begin{cases} a(x) & \text{si } x \in]-1,0[\\ \lambda & \text{si } x = 0 \\ b(x) & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

appartient-elle à $H^1(]-1,1[)$? Dans ce cas, donner une expression de sa dérivée.

Exercice 3.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note B_n la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$. Soit $p \in [1,+\infty[$. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $f_\alpha : x \mapsto |x|^{-\alpha}$ appartient-elle à $W^{1,p}(B_n)$?

Exercice 3.3 (Fonctions de dérivée nulle au sens des distributions)**.** **1.** Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que $u' = 0$ au sens des distributions. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha$ presque partout sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\partial_j u = 0$ au sens des distributions pour tout $j \in [\![1,n]\!]$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha$ presque partout sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3.4 (Représentant continu d'une fonction de $W^{1,p}(\mathbb{R})$)**.** Soit $p \in [1,+\infty]$ et $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une fonction v continue sur $\mathbb{R}$ telle que $v = u$ presque partout sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad v(y) - v(x) = \int_x^y u'(t)\, dt.$$

Exercice 3.5. **1.** On note B_2 le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'application $(x,y) \mapsto \left|\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|^\alpha$ est-elle dans $H^1(B_2)$?
2. Toute fonction dans $H^1(B_2)$ admet-elle un représentant continu ?

Exercice 3.6 (Traces)**.** On considère l'application

$$\gamma_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) & \to & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & \phi(0) \end{array} \right.$$

1. En considérant la suite de fonctions $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$ par $\phi_n(x) = e^{-nx}$, montrer que γ_0 ne peut être étendue en une application continue sur $L^2(\mathbb{R}_+^*)$.
2. Montrer que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ on a $|\gamma_0(\phi)| \leqslant \|\phi\|_{H^1(\mathbb{R}_+^*)}$.
3. En déduire que γ_0 peut être étendu à une application linéaire continue sur $H^1(\mathbb{R}_+^*)$.
4. On note $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$. Montrer de même qu'on peut définir une application linéaire continue γ_0 de $H^1(\mathbb{R}^2_+)$ dans $L^2(\mathbb{R})$ telle que pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_+)$ on a $\gamma_0\phi : x \mapsto u(x,0)$.

Exercice 3.7 (Inégalité de Poincaré)**.** Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x,y) \in \Omega$ on a $x \in]a,b[$. Soit $p \in [1,+\infty[$. Montrer qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^2)}.$$

Exercice 3.8 (Inégalité de Poincaré-Wiertinger)**.** Soit Ω un ouvert borné régulier connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit $p \in [1,+\infty[$. On rappelle que l'inclusion $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ est compacte. Montrer qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega u(x)\, dx = 0$$

on a

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^2)}.$$

Exercice 3.9 (Inégalité de Hardy)**.** Soit $p \in]1,+\infty[$ (on peut éventuellement commencer par faire l'exercice pour le cas $p=2$). On veut montrer que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+)$ on a $u(x)/x \in L^p(\mathbb{R}_+)$ et

$$\left\| \frac{u(x)}{x} \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} \leqslant \frac{p}{p-1} \left\| u' \right\|_{L^p(\mathbb{R}_+)} .$$

1. Pour $x > 0$ on note $v(x) = u(x)/x$. Montrer que $v(x) = o\big(x^{-\frac{1}{p}}\big)$. Que peut-on en conclure ? Plus généralement, montrer que si $v(x_0) = 0$ alors

$$v(x) \underset{x \to x_0}{=} o\left(|x - x_0|^{-\frac{1}{p}} \right).$$

2. On suppose que $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$.

a. Montrer que $|v|^p$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

b. En effectuant une intégration par parties dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} |v(x)|^p \, dx$, montrer le résultat dans le cas où $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$.

3. Conclure.

4. Inversement, montrer que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$ est telle que $u(x)/x \in L^p(\mathbb{R}_+)$ alors $u(0) = 0$.

5. En considérant la fonction $u : x \mapsto \chi(x)\big(1 + |\ln(x)|\big)^{-1}$, où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est égale à 1 sur [-1,1], montrer que le résultat démontré n'est pas vrai pour $p = 1$.