TD n° 2 : Équations de transport

Exercice 2.1. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{2}$$

1. On suppose que $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est solution de (1)-(2). Pour $(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on pose

$$\tilde{u}(t,y) = u(t, y + ct)$$

(autrement dit, on fait le changement de variable $x = y + ct$).

a. Montrer que $\tilde{u}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b. Montrer que

$$\forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,y) = 0.$$

c. Exprimer $\tilde{u}$ en fonction de u_0.

d. En déduire une expression de u en fonction de u_0.

2. a. Montrer que la fonction u obtenue à la question précédente est bien solution de (1)-(2).

b. Conclure quant à l'existence et à l'unicité d'une solution C^1 pour ce problème.

c. Dessiner les droites du plan (x,t) le long desquelles la solution u est constante quelle que soit la condition initiale u_0.

3. On note u la solution du problème (1)-(2).

a. On suppose que u_0 est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ pour un certain $k \geqslant 0$. Montrer qu'alors u est de classe C^k sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b. On suppose que $\operatorname{supp} u_0 \subset [a,b]$ pour $a < b$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ le support de la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est inclus dans $[a + ct, b + ct]$.

c. Montrer que pour tous $p \in [1, +\infty]$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $\|u(t,\cdot)\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p}$.

La résolution de l'équation (1) est devenue facile une fois observé le fait que les solutions sont nécessairement constantes le long des droites d'équation $x = x_0 + ct$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour connaitre la solution en un point, il suffit de suivre cette droite jusqu'à un point où la solution est donnée (par la condition initiale). Dans les cas suivants, la solution n'est plus constante le long de ces droites, mais cela reste une bonne idée de voir comment elle y évolue.

Exercice 2.2. Soient $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation

$$\partial_t u + c\partial_x u = f(t,x) \tag{3}$$

avec la condition initiale (2). En reprenant la stratégie de l'exercice précédent, montrer que le problème (3)-(2) admet une unique solution C^1 que l'on explicitera en fonction des données.

Exercice 2.3. Soient $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et $a \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation

$$\partial_t u + c\partial_x u + a(t,x)u = f(t,x) \tag{4}$$

avec la condition initiale (2). En reprenant la stratégie de l'exercice précédent, montrer que le problème (4)-(2) admet une unique solution que l'on explicitera en fonction des données.

Exercice 2.4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ $v \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $a \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'équation

$$\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + a(t,x)u = f(t,x) \tag{5}$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{6}$$

En reprenant la stratégie des exercices précédents, montrer que le problème (5)-(6) admet une unique solution C^1 que l'on explicitera en fonction des données.

Exercice 2.5. On s'intéresse maintenant au cas où la vitesse v dépend du temps et de la position.
1. Commençons par le cas de la dimension 1. On reprend le problème (1) en supposant maintenant que $c = c(t,x)$ est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0. \tag{7}$$

Le changement de variable $x = y + ct$ n'a plus de sens ici. On cherche donc par quoi le remplacer. On suppose que $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est solution de (7). Montrer que si la fonction $X \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution d'une E.D.O. (par rapport à t) bien choisie, alors indépendamment de la condition initiale on a toujours

$$\forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}\, u\big(t, X(t,y)\big) = 0.$$

Comparer avec le changement de variable effectué pour le cas c constant.
2. Même question en dimension quelconque, en remplaçant v par $v(t,x)$ dans (5) (avec $a = f = 0$), et où X est maintenant une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2.6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ $v \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $a \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. On suppose de plus que v est une fonction bornée. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'équation

$$\partial_t u + v(t,x) \cdot \nabla_x u + a(t,x)u = f(t,x) \tag{8}$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{9}$$

1. Soit $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On considère l'E.D.O.

$$\frac{d}{dt}X(t; t_0, y_0) = v\big(X(t; t_0, y_0)\big), \quad X(t_0; t_0, y_0) = y_0. \tag{10}$$

a. Montrer que (10) admet une unique solution, et qu'elle est bien définie sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que cela définit une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
c. Montrer que pour $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ on a

$$X\big(t_1; t_2, X(t_2; t_3, y_0)\big) = X(t_1; t_3, y_0).$$

d. En dérivant par rapport à t l'égalité

$$X\big(s, t, X(t, s, x)\big) = x,$$

montrer que pour tout $(\tau, t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on a

$$\frac{\partial X}{\partial t_0}(\tau; t_0, y_0) + v(t_0, y_0) \cdot \frac{\partial X}{\partial y_0}(\tau; t_0, y_0) = 0.$$

Afin de simplifier les notations, on pourra se contenter dans un premier temps du cas $n = 1$.
2. On suppose que u est solution de (8)-(9). Pour $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, calculer

$$\frac{d}{dt}u\big(t, X(t; t_0, x_0)\big).$$

3. Montrer que le problème (8)-(9) admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ donnée par

$$u(t,x) = \exp\left(-\int_0^t a\big(s, X(s;t,x)\big)\, ds\right) u_0\big(X(0;t,x)\big) + \int_0^t f\big(s, X(s;t,x)\big) \exp\left(-\int_s^t a\big(\tau, X(\tau;t,x)\big)\, d\tau\right) ds.$$

Exercice 2.7. Soit $v \in C^1(\mathbb{R}, [0,1])$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$v(t,0) = v(t,1) = 0.$$

Soit u_0 une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. On considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t u + v\, \partial_x u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times [0,1] \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } [0,1]. \end{cases} \tag{11}$$

1. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [0,1]$. On considère comme à l'exercice précédent la solution maximale $X(\cdot; t_0, x_0)$ à l'EDO (10). Montrer que X est bien définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$.
2. Montrer que le problème (11) admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,1])$ que l'on explicitera en fonction de u_0 et X.

Exercice 2.8. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^2 (cela signifie que son bord $\partial\Omega$ peut être représenté au voisinage de tout point comme le graphe d'une fonction C^2). Soit v un champ de vecteurs de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \overline{\Omega}$. On rappelle que $v(t,.)$ peut être prolongé pour tout $t \in \mathbb{R}$ en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^n$ (on note encore v ce prolongement). Pour $x \in \partial\Omega$ on note $\nu(x)$ la normale sortante à Ω en x. On suppose que $v(t,.)$ est tangent à $\partial\Omega$ pour tout temps $t \in \mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \partial\Omega, \quad \langle v(t,x) \cdot \nu(x) \rangle = 0.$$

Étant donné $x_0 \in \overline{\Omega}$, on se propose d'étudier quelques propriétés des solutions du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X'(t) & = & v(t, X(t)), \\ X(t_0) & = & x_0. \end{array} \right. \tag{12}$$

1. On suppose dans un premier temps que $x_0 \in \partial\Omega$. Que peut-on dire intuitivement de la solution maximale X correspondante ? Pourquoi suffit-il de le montrer localement en temps ?
2. Quitte à translater et à changer de repère, on peut supposer que $x_0 = 0$ et qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $h \in C^2(\mathbb{R}^{n-1}; \mathbb{R})$ tels que $h(0) = 0$ et

$$\partial\Omega \cap \mathcal{U} = \left\{ x = (x', z) \in (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{U} \,|\, z = h(x') \right\}$$

(justifier). Pour $(x', z) \in \mathcal{U}$ on définit

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \to & \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \\ (x', z) & \mapsto & y = (x', z - h(x')) \end{array} \right.$$

Montrer que Φ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans un certain voisinage $\mathcal{V}$ de 0. Que peut-on dire de l'image $H = \Phi\,(\partial\Omega \cap \mathcal{U})$.
3. Montrer que $Y(t) = \Phi(X(t))$ vérifie une équation différentielle de la forme $Y' = v^*(t, Y)$ (on explicitera le champ vecteur v^* en fonction de v et Φ). Quelle est la condition initiale associée à $X(t_0) = x_0 = 0$?
4. Montrer que la trajectoire $Y(t)$ reste dans H pour des temps $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ suffisament proches de t_0.
5. Montrer que pour toute condition initiale $x_0 \in \partial\Omega$ la trajectoire $X(t)$ correspondante est globale en temps et reste dans $\partial\Omega$.
6. En déduire que pour toute condition initiale $x_0 \in \Omega$ la trajectoire $X(t)$ correspondante est globale en temps et reste dans Ω.

Exercice 2.9. Soient $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction **bornée**. On s'intéresse au problème **non-linéaire** suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u - u^2 = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{13}$$

1. On suppose dans cette question que la fonction u_0 est négative. Montrer que le problème (13) admet une unique solution C^1 définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Calculer explicitement cette solution en fonction des données.
2. On suppose dans cette question que u_0 est positive (et non identiquement nulle). Montrer cette fois que le problème (13) admet une unique solution C^1 définie sur un domaine maximal $[0, T^*[\times\mathbb{R}$. Calculer T^* et la solution u explicitement en fonction des données.
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la vitesse constante c par une fonction régulière et bornée $(t,x) \mapsto c(t,x)$. Quel commentaire peut-on faire sur le temps d'existence T^* ?

Exercice 2.10. On s'intéresse dans cet exercice à la résolution d'un **système** de transport monodimensionnel à coefficients constants de la forme

$$\begin{cases} \partial_t U + A\partial_x U = 0, \quad \forall t \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(0,x) = U_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{14}$$

où $U(t,x) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$ est une inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et A une matrice carrée de taille 2×2 à coefficients constants.
1. On suppose que A est diagonalisable à valeurs propres réelles ; $A = P^{-1}DP$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Montrer que le problème (14) admet une unique solution U que l'on calculera explicitement en fonction de U_0, de P et des λ_i.
2. Vérifier que dans le cas précédent, il existe une constante $C > 0$ qui dépend de A, telle que

$$\sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \|U(t,x)\| \leqslant C\|U_0\|_\infty.$$

3. On suppose que A est symétrique réelle et que U_0 est à support compact. Démontrer que la solution $U(t,.)$ de (14) reste à support compact $K(t)$ et vérifie

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|U(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

4. On souhaite comprendre ce qui passe dans le cas d'une matrice qui n'est pas diagonalisable.

a. Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer explicitement la solution de (14) en fonction de U_0. Est-ce que la solution U est bornée sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$? Démontrer tout de même que :

$$\forall T > 0, \; \exists C_T > 0, \quad \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} ||U(t,x)|| \leqslant C_T||U_0||_{C^1}. \tag{15}$$

b. On considère maintenant le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction U_n définie par

$$U_n(t,x) = e^{tn} \begin{pmatrix} \sin(nx) \\ -\cos(nx) \end{pmatrix},$$

est solution du système (14) pour une donnée initiale U_0 bien choisie. En déduire qu'une inégalité du type (15) ne peut pas être vraie dans ce cas.

Exercice 2.11. Soient $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ et $c > 0$. Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad u(t,x) = f(x - ct),$$

est dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ et vérifie au sens des distributions :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$