TD n^o 4 :

Intégrales multiples

Exercice 4.1. Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ et $D = [-1,1]\times[1,2]$,
2. $f(x,y) = \sin(x+y)$ et $D = [0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$,
3. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+xy+x^2}}$ et $D = [3,7]\times[-2,2]$.

Exercice 4.2. On note $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1\}$. Calculer

$$I_1 = \iint_D 1\,dx\,dy,\quad I_2 = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy,\quad I_3 = \iint_D xy(x+y)\,dx\,dy.$$

Exercice 4.3. Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = x+y$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\geqslant x\geqslant 0,\ x^2\leqslant y\leqslant x\}$,
2. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^3}$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3 > x > 1,\ y > 2,\ x+y < 5\}$,
3. $f(x,y) = \cos(xy)$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2\geqslant x\geqslant 1,\ 0\leqslant xy\leqslant 2\}$,
4. $f(x,y) = x$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqslant 0,\ x-y+1\geqslant 0,\ x+2y-4\leqslant 0\}$,
5. $f(x,y) = xy$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ xy+x+y\leqslant 1\}$.

Exercice 4.4. Calculer les aires des domaines suivants :
$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 4-x^3\}$,
$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant \pi,\ -\sin x\leqslant y\leqslant \sin x\}$,
$D_3 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geqslant 0,\ x-y+1\geqslant 0,\ y\leqslant -x^2+2x+1\}$.

Exercice 4.5. On considère le domaine

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0, x+y+z\leqslant 1\}.$$

Pour $z_o\in\mathbb{R}$, on considère $T_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y,z)\in D\}$.
1. Pour quelles valeurs de z le domaine T_z est-il non-vide ?
2. Dans ce cas, calculer $\iint_{T_z} x\,dx\,dy$.
3. Calculer $\iiint_D x\,dx\,dy\,dz$.

Exercice 4.6. En passant aux coordonnées polaires, calculer l'aire du domaine

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < x^2+y^2 < 3 \text{ et } y > 0\right\}$$

(et vérifier qu'on obtient bien le résultat attendu).

Exercice 4.7. On note $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\in[0,1],\ x^2+y^2\geqslant 1\}$. Calculer

$$I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Exercice 4.8. Calculer $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y,z) = \cos x$, $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$,
2. $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant 4,\ 0\leqslant z\leqslant 2\}$.

Exercice 4.9. On considère le domaine D borné délimité par les droites d'équations $x = 0$, $y = x + 2$ et $y = -x$. Calculer l'intégrale $\iint_D (x + y)\, dx\, dy$
1. par calcul direct,
2. en effectuant le changement de variable $(u, v) = (x + y, x - y)$.

Exercice 4.10. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leqslant x,\, 0 \leqslant y, 0 < x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Exercice 4.11. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0\}$.
1. Montrer que D est un disque.
2. Calculer $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$.

Exercice 4.12. Calculer $\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy$, où on a noté $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 4.13. Calculer l'intégrale de la fonction $f : (x, y) \mapsto (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)$ sur le domaine $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\right\}$, où $b > a > 0$. On pourra effectuer le changement de variables $u = xy$, $v = y^2 - x^2$.

Exercice 4.14. Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$. On rappelle que le *centre de gravité* de D est le point $(x_G, y_G) \in \mathbb{R}^2$ défini par

$$(x_G, y_G) = \frac{1}{\text{Aire}(D)} \left(\iint_D x\, dx\, dy, \iint_D y\, dx\, dy \right).$$

1. Déterminer le centre de gravité du disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le trapèze $D_k \subset \mathbb{R}^2$ de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, k)$. Déterminer le centre de gravité de D_k.
3. Considérons l'application affine $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, défini par

$$\varphi(x, y) = (x + 3y, x - y) + (2, 3).$$

Soit (x'_G, y'_G) le centre de gravité du domaine $\varphi(D)$. Montrer que $(x'_G, y'_G) = \varphi(x_o, y_o)$.
4. Plus généralement, montrer que pour toute application affine (inversible) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, le centre de gravité de $\varphi(D)$ est $\varphi(x_G, y_G)$.
5. Déduire de la question précédente que si D est symétrique par rapport à l'axe des abscisses et par rapport à l'axe des ordonnées alors son centre de gravité est l'origine.

Exercice 4.15. Soient des nombres réels positifs a et b. On définit le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \leqslant 1\}$.
1. Calculer $\iint_D (2x^3 - y) dx dy$.
2. Calculer les coordonnées du centre de gravité de D.

Exercice 4.16. Soient $a > 1$ et $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la boule unité. Calculer

$$\iiint_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}} dx dy dz.$$

Exercice 4.17. Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Calculer le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ d'équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} < 1.$$

Exercice 4.18. Soit $a \in]0, 1[$ et $S = \{(u \cos t, u \sin t, \sin t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \leqslant u \leqslant 1,\, 0 \leqslant t \leqslant \pi\}$.
1. Trouver un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ tels que

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D\}.$$

2. Calculer le volume du solide

$$T = \{(x, y, rf(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\, 0 \leqslant r \leqslant 1\}.$$

Exercice 4.19. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Calculer l'aire du domaine inclus dans le quadrant $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x > 0, y > 0\}$ et délimité par les droites d'équation $y = ax$, $y = \frac{1}{a}x$ et les hyperboles d'équation $y = \frac{b}{x}$ et $y = \frac{1}{bx}$.

Exercice 4.20. Posons $H = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$.
1. Utiliser un changement de variables pour montrer que $H = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4.21. **1.** Tracer l'ensemble C des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x^2 + y^2 = (z + 1)^2$ pour $z \geqslant -1$. Déterminer l'intersection de C avec la sphère $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
2. Tracer le solide K défini par

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,\}.$$

3. Calculer le volume de K (Indication : pour $z_o \in [0, 1]$ et $P_{z_o} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = z_o\}$ calculer l'aire de $P_{z_o} \cap K$ comme fonction de z_o.)

Exercice 4.22. (Solide de révolution)
1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et deux nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que le volume du solide $S \subset \mathbb{R}^3$ délimité par les plans $z = a$ et $z = b$ et la courbe $x^2 + y^2 \leqslant g(z)$ est $\pi \int_a^b g^2(z) dz$.
2. Considérer D, le domaine (borné) de $\mathbb{R}^2$, délimité par les courbes $z = x^2$ et $x = z^2$. Calculer le volume du solide de révolution obtenu en faisant pivoter D autour de l'axe des z dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.23. **1.** Soient $R > 0$ et $h > 0$. On considère dans $\mathbb{R}^3$ le cône C dont la base est le disque de centre 0 et de rayon R inclus dans le plan $(0xy)$ et dont le sommet est $S = (0, 0, h)$. Calculer le volume de C.
2. Calculer le volume de C lorsque $S = (x_0, 0, h)$, avec $x_0 > 0$.
3. Soit A un domaine simple du plan $(0xy)$ d'aire $\mathcal{A}$. Calculer le volume du cône C de base A et de sommet $(0, 0, h)$.