TD n° 3 :

Intégrales à paramètres

Exercice 3.1. Montrer que l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^2} dt$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3.2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ on note $f_n(x) = n\cos^n(x)\sin x$.
1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier la limite éventuelle de $\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.3. On considère une fonction $f : [0\,;\,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On se propose de montrer que

$$\int_0^1 f(t)^n dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On considère un réel $\varepsilon \in]0\,;\,1[$ et on pose $a = f(1-\varepsilon)$.
1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\int_0^{1-\varepsilon} f(t)^n dt < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$.
2. Montrer que $\int_0^1 f(t)^n dt < 2\varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, et conclure.

Exercice 3.4. On considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} & \text{si } x \in [0\,;\,n], \\ -\frac{x}{n^2} + \frac{2}{n} & \text{si } x \in [n\,;\,2n], \\ 0 & \text{si } x \in [2n\,;\,+\infty[. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f_n.
2. Étudier la convergence (simple et uniforme) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Comparer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,dt$ et $\int_0^\infty \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\,dt$.

Exercice 3.5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et φ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x,y,z) = \int_0^{2\pi} f(x + z\cos\theta, y + z\sin\theta)\,d\theta.$$

Montrer que φ est bien définie et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que sur $\mathbb{R}^3$ on a

$$z\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,.$$

Exercice 3.6. On considère les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $h(x) = g(x) + f^2(x)$ est constante.
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3.7. **1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$ est convergente. On note alors $\varphi(x)$ sa valeur.
2. Montrer que cela définit une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\varphi'(x) = -\frac{x\varphi(x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. En déduire (avec l'exercice précédent) que $\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

Exercice 3.8. Pour $x \geqslant 0$, on pose

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} dt.$$

1. Montrer que ψ est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que ψ est continue sur $[0, +\infty[$
3. Montrer que ψ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
4. Calculer $\psi(0)$ et étudier la limite de ψ en $+\infty$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\psi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds$.
6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\int_0^{+\infty} \psi'(x)dx = -2\left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds\right)^2$.
7. En déduire (sans utiliser les exercices précédents) que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3.9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+x^2)^n} dt.$$

1. Montrer que $I_n(x)$ est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer sa dérivée.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^3} dt$.

Exercice 3.10. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x,t) = \frac{x\sin(xt)}{t}$ et $\psi(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ mais que $\psi'(x) \neq \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Exercice 3.11. On fixe $y \in \mathbb{R}_+^*$ et on définit $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt.$$

1. Montrer que ϕ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que ϕ est de classe C^1 et que $\phi'(x) = -1/x$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\phi(x) = -\ln(x/y)$.

Exercice 3.12. (Fonction Gamma) Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$. La fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ (voir TD2).
1. Étudier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Γ est de classe C^k et calculer $\Gamma^{(k)}$.

Exercice 3.13. (Fonction de Bessel) On considère sur $\mathbb{R}$ la fonction J_0 définie par

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

1. Montrer que cette J_0 est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que J_0 est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0.$$

Exercice 3.14. Pour $x \geqslant 0$ on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$.
1. Montrer que F est continue, décroissante et que $F(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t/2)}{(t+x)^2} dt$.
2. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.