Quelques corrections ou indications

Table des matières

1 Fonctions de plusieurs variables. Limites dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3

1. Soit $\varepsilon > 0$. Comme x_m tend vers l_1 quand m tend vers $+\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N_1, \quad \|x_m - l_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N_2, \quad \|x_m - l_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour $m \geqslant N$ on a par l'inégalité triangulaire :

$$\|l_1 - l_2\| = \|(x_m - l_2) - (x_m - l_1)\| \leqslant \|x_m - l_2\| + \|x_m - l_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que $\|l_1 - l_2\| = 0$, et donc que $l_1 = l_2$.
2. • On commence par montrer que $\lambda x_m \to \lambda l_1$. C'est clair si $\lambda = 0$. Supposons maintenant que $\lambda \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N, \quad \|x_m - l_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Pour tout $m \geqslant N$ on a alors

$$\|\lambda x_m - \lambda l_1\| = |\lambda| \, \|x_m - l_1\| \leqslant |\lambda| \, \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Cela prouve que λx_m tend vers λl_1 quand m tend vers $+\infty$.
• Montrons maintenant que $x_m + y_m$ tend vers $l_1 + l_2$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme x_m tend vers l_1 quand $m \to \infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N_1, \quad \|x_m - l_1\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall m \geqslant N_2, \quad \|y_m - l_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

On note $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour $m \geqslant N$ on a par l'inégalité triangulaire :

$$\|(x_m + y_m) - (l_1 + l_2)\| = \|(x_m - l_1) + (y_m - l_2)\| \leqslant \|x_m - l_1\| + \|y_m - l_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où le résultat.

Exercice 4

Pour montrer par exemple que $\|\cdot\|_1$ est contrôlée par $\|\cdot\|_\infty$, il suffit d'écrire que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j|}_{\leqslant \|x\|_\infty} \leqslant n \|x\|_\infty .$$

On remarque que si on a montré que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, alors ces deux normes sont automatiquement équivalentes entre elles.

D'autre part pour les inégalités faisant intervenir $\|\cdot\|_2$, on peut utiser le fait que si a et b sont des réels *positifs*, alors $a \leqslant b$ si et seulement si $a^2 \leqslant b^2$.

Exercice 5

Pourquoi considère-t-on que l'ensemble vide est un ouvert de $\mathbb{R}$? Ou plus généralement de $\mathbb{R}^n$? La définition qui caractérise un ouvert est du type « tout élément de l'ensemble vérifie une certaine propriété ». C'est bien le cas pour l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément qui ne vérifie pas la propriété en question. Pour ce qui concerne le caractère ouvert, on dit qu'une partie Ω de $\mathbb{R}^n$ est ouverte si et seulement si

$$\forall x \in \Omega, \exists r > 0, \forall y \in B(x, r), \quad y \in \Omega.$$

Ainsi, un ensemble n'est pas ouvert si et seulement si

$$\exists x \in \Omega, \forall r > 0, \exists y \in B(x, r), \quad y \notin \Omega.$$

Et clairement dans l'ensemble vide on ne peut pas trouver un tel x, donc l'ensemble vide n'est pas (pas ouvert). Il est donc ouvert. Ce n'est pas si intéressant de regarder les propriétés de l'ensemble vide, mais ça nous permet de jouer un peu à manipuler les quantificateurs...

2 Continuité d'une fonction de plusieurs variables.

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$. Soient alors $K > 0$ et f une fonction K-lipschitzienne sur un domaine $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathcal{U}$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$. Alors pour tout $x \in \mathcal{U}$ tel que $\|x - a\| \leqslant \delta$ on a

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant K \|x - a\| \leqslant K\delta \leqslant \varepsilon.$$

Cela prouve que f est continue en a. Ceci étant valable pour n'importe quel $a \in \mathcal{U}$, la fonction f est continue sur $\mathcal{U}$ (en fait elle est même uniformément continue).

Exercice 7

1. Pour tous $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leqslant r^2 \xrightarrow[r \to 0]{} 0,$$

donc f tend vers 0 en (0,0).

2. Supposons par l'absurde que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en (0,0). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$u_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Alors u_n et v_n tendent vers (0,0) quand n tend vers l'infini, donc par composition de limites (la composition de limites n'a pas été énoncée explicitement dans le cours, mais c'est vrai, ça marche comme pour des suites réelles, et vous pouvez l'utiliser), on obtient que

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l \quad \text{et} \quad f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(u_n) = 0$ et $f(v_n) = \frac{1}{2}$. On obtient donc que $l = 0$ et $l = \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Donc f n'admet pas de limite en (0,0).

3. On suppose par l'absurde que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en (0,0). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$u_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right).$$

Alors u_n tend vers (0,0) quand n tend vers $+\infty$, donc par composition de limites on obtient que $f(u_n)$ tend vers l. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f(u_n) = \frac{-\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}}{-\frac{1}{n^3}} = n + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ce qui est absurde. Ainsi f n'a pas de limite (finie) en (0,0). (en considérant la suite $(1/n, -1/n + 1/n^3)$ on observe qu'on ne peut pas non plus dire que f tend vers $+\infty$).

4. *Il suffit d'approcher (0,0) par les axes pour constater qu'il y a un problème.*
5. *Il ne faut pas avoir peur du gros sinus, il se majore simplement par 1 (en valeur absolue).*
6. *Il suffit d'approcher (0,0) par les axes pour constater qu'il y a un problème.*
7. $\sin(y)/y \to 0$ *quand* $y \to 0$.
8. *La limite est 0, pas de piège particulier.*
9. *Débrouillez-vous...*

3 Dérivées partielles, différentielle, fonctions de classe C^1

Exercices à traiter en priorité pour ce chapitre : 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 12, 15, 16, 22, 18

Exercice 6

Comme f est différentiable en a, il existe une fonction ε_1 définie sur un voisinage $\tilde{\mathcal{U}}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

et pour $h \in \tilde{\mathcal{U}}$ on a

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_1(h).$$

De même g est différentiable en $f(a)$, il existe une fonction ε_2 définie sur un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}$ de 0 dans $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ telle que

$$\varepsilon_2(k) \xrightarrow[k\to 0]{} 0$$

et pour $k \in \tilde{\mathcal{V}}$ on a

$$g(f(a)+k) = g(f(a)) + d_{f(a)}g(k) + \|k\| \varepsilon_2(k).$$

Quitte à réduire $\tilde{\mathcal{U}}$ on peut supposer que $f(a+h) - f(a) \in \tilde{\mathcal{V}}$ quand $h \in \tilde{\mathcal{U}}$. En appliquant l'égalité précédente avec $k = f(a+h) - f(a) = d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)$ on a alors

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)) \\ &= g(f(a)) + d_{f(a)}g\big(d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\big) + \|d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\| \varepsilon_2\big(d_a f(h) + \|h\| \varepsilon_1(h)\big) \\ &= g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h)) + r(h) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} r(h) &= d_{f(a)}g(\|h\|\,\varepsilon_1(h)) + \|d_a f(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\|\,\varepsilon_2\big(d_a f(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big) \\ &= \|h\|\,\Big(d_{f(a)}g(\varepsilon_1(h)) + \|d_a f(h/\|h\|) + \varepsilon_1(h)\|\,\varepsilon_2\big(d_a f(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big)\Big) \\ &= \underset{h\to 0}{o}(\|h\|), \end{aligned}$$

car

$$d_{f(a)}g(\varepsilon_1(h)) + \|d_a f(h/\|h\|) + \varepsilon_1(h)\|\,\varepsilon_2\big(d_a f(h) + \|h\|\,\varepsilon_1(h)\big) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Cela prouve que $(g \circ f)$ est différentiable en a de différentielle $d_{f(a)}g \circ d_a f$.

Exercice 8

1. L'application ψ est de classe C^1 (chaque coordonnée est le produit de deux fonctions usuelles) et donc différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. $\tilde{f}$ est alors différentiable comme composée de fonctions différentiables.
2.
3. On a d'une part

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big).$$

D'autre part, si on note $\varphi(t) = f(x + t\cos(\theta), y + t\sin(\theta))$ alors la dérivée de f au point (x,y) est

$$\varphi'(0) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Puisque $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, cela donne bien l'égalité attendue.

Exercice 9

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$f(x+h) = \langle u(x), x\rangle + \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle + \langle u(h), h\rangle\,.$$

On a $\langle u(x), x\rangle = f(x)$ et l'application $h \mapsto \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle$ est linéaire par rapport à h. D'autre part $|\langle u(h), h\rangle| \leqslant \|h\|\,\|u(h)\|$ et $\|u(h)\| \to 0$ quand $h \to 0$ (une application linéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue). Tout cela prouve que f est différentiable en x de différentielle

$$d_x f : h \mapsto \langle u(h), x\rangle + \langle u(x), h\rangle\,.$$

Exercice 10

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note $\varphi(t) = \|tv\| = |t|\,\|v\|$. Comme $\|v\| \neq 0$, l'application φ n'est pas dérivable en 0, ce qui signifie que l'application norme n'est pas dérivable en 0 dans la direction v. Cela implique en particulier qu'elle n'est pas différentiable en 0.

Exercice 16

C'est sur ce genre d'exerice qu'il peut y avoir des embrouilles avec les notations. Pour éviter les confusions, on va prendre ici les notations $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ pour les dérivées partielles de f par rapport à sa première et sa deuxième variable respectivement. De même pour les différentes fonctions g.

- La fonction g_1 est de classe C^1 comme composée de f avec la fonction $x \mapsto (x, -x)$, qui sont toutes deux de classe C^1. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g_1'(x) = \partial_1 f(x, -x) - \partial_2 f(x, -x).$$

- La fonction g_2 est C^1 comme composée de f avec la fonction $(x, y) \mapsto (y, x)$. En outre pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_1 g_2(x, y) = 0 \times \partial_1 f(y, x) + 1 \times \partial_2 f(y, x) = \partial_2 f(y, x)$$

 et

$$\partial_2 g_2(x, y) = \partial_1 f(y, x).$$

- La fonction $h : x \mapsto f(x, x)$ est C^1 comme composée de f avec la fonction $x \mapsto (x, x)$, et donc g_3 est C^1 comme composée de f avec la fonction $x \mapsto (x, h(x))$. En outre pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} g_3'(x) &= \partial_1 f(x, f(x, x)) \times 1 + \partial_2 f(x, f(x, x)) \times h'(x) \\ &= \partial_1 f(x, f(x, x)) + \partial_2 f(x, f(x, x)) \left(\partial_1 f(x, x) + \partial_2 f(x, x)\right). \end{aligned}$$

- La fonction g_4 est C^1 comme composée de f avec la fonction $(x, y) \mapsto (y, h(x))$. En outre pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_1 g_4(x, y) = \partial_2 f(y, f(x, x)) \left(\partial_1 f(x, x) + \partial_2 f(x, x)\right)$$

 et

$$\partial_2 g_4(x, y) = \partial_1 f(y, f(x, x)).$$

Exercice 18

L'application f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on a

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{|x|\,|y|^3}{y^2} \leqslant |x|\,|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Cela prouve que f tend vers 0 en (0,0), et donc que f est continue en (0,0). Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\frac{y^5 - 3x^4y^3}{(x^4 + y^2)^2}\right| \leqslant \frac{3\,|x|^4\,|y|^3}{4x^4y^2} + \frac{|y|^5}{y^4} \leqslant \frac{3}{4}\,|y| + |y|\,\frac{|x|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{3x^5y^2 + xy^4}{(x^4 + y^2)^2}\right| \leqslant \frac{3\,|x|^5\,|y|^2}{4x^4y^2} + \frac{|x|\,|y|^4}{y^4} \leqslant \frac{3}{4}\,|x| + |x|\,\frac{|x|}{2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Puisque les dérivées partielles de f existent et sont nulles en (0,0), on obtient que f est de classe C^1 en (0,0) et donc sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice supplémentaire

Soit $\beta > 0$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer pour quelles valeurs de β la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$, et pour quelles valeurs elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse : $\beta > 1$ puis $\beta > 3/2$. Pour montrer que f est différentiable en (0,0) si $\beta > 3/2$ le plus simple ici est de s'inspirer de l'exercice 11.

5 Dérivées d'ordres supérieurs

Exercice 5

1. La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\nabla f(x, y) = (4x^3, 4y^3).$$
Ainsi le seul point critique de f est le point $(0, 0)$. Or pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on a
$$f(x, y) > 0 = f(0, 0),$$
donc f admet un minimum global (et donc en particulier local) strict en (0,0). En outre f n'admet pas d'autre extremum local.
2. La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\nabla f(x, y) = (4x^3, -4y^3).$$
Ainsi le seul point critique de f est le point $(0, 0)$. Pour $t \neq 0$ on a
$$f(t, 0) > 0 = f(0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, t) < 0 = f(0, 0).$$
Donc f n'admet pas d'extremum local en (0,0). Finalement f n'admet aucun extremum local.
3. La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\nabla f(x, y) = (4x^3, 0).$$
Ainsi les points critiques de f sont les points de la forme $(0, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$, pour lesquels f s'annule. Or pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$f(x, y) \geqslant 0,$$
donc f admet une droite de minimums globaux (et donc en particulier locaux). Ce ne sont pas des minimums stricts. En outre f n'admet pas d'autre extremum local.
4. La fonction f est l'opposée de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, qu'on a déjà étudiée. f admet donc un unique extremum local en (0,0), et c'est un maximum global strict.

Exercice 6

- La fonction f est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a
$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x).$$
Les point critiques de f sont donc les points (0,0) et (1,1). D'autre part on a
$$\det \operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9.$$
En (0,0) on a $\det \operatorname{Hess} f(x, y) < 0$, donc f admet un point selle. En (1,1) on a $\det \operatorname{Hess} f(x, y) > 0$ et $\Delta f(x, y) > 0$, donc f admet un minimum local strict. C'est donc le seul extremum local de f. Puisque
$$f(0, y) = y^3 \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty,$$
f n'admet pas de minimum global.
- (0,0), (1,1), (-1,-1), pas d'extremum, min global, min global.
- (0,1) minimum global, $(0, e^{-2})$ pas extremum local.
- (-2,2), minimum global.

Exercice 9

Indication : si f est solution, poser

$$\tilde{f}(u,v) = f\left(\frac{u-v}{2c}, \frac{u+v}{2}\right)$$

puis calculer

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial u \partial v}.$$

6 Théorème de l'inversion locale - Théorème des fonctions implicites

Exercices à traiter en priorité : 2, 3 , 5 , 6 , 9 , 12 , 11.

Exercice 6

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f(x,y) = \big(2x + 3y + 5x^2y^3, x - y + \sin(x^6y^3)\big).$$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. On a $f(0,0) = (0,0)$ et

$$\det \mathrm{Jac}_{(0,0)} f = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

D'après le théorème de l'inversion locale il existe des voisinage $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de (0,0) dans $\mathbb{R}^2$ tels que f réalise un C^∞-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$. Il existe $r > 0$ tel que pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a| + |b|$ on a $(a,b) \in \mathcal{V}$. Pour un tel couple (a,b), l'équation $f(x,y) = (a,b)$ admet donc une solution $(x,y) \in \mathcal{U}$.

Exercice 12

L'application $f : (x,y) \mapsto x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y$ est polynômiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. En outre pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2x + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 2y - 1.$$

En particulier on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites il existe des ouverts I et J de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\varphi : I \to J$ une fonction de classe C^∞ tels que pour tout $(x,y) \in I \times J$ on a $f(x,y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. Ainsi, au voisinage de (0,0), l'ensemble $\mathcal{C}$ coïncide avec le graphe de φ, que nous étudions maintenant. Pour tout $x \in I$ on a

$$x^4 + \varphi(x)^3 - x^2 - \varphi(x)^2 + x - \varphi(x) = 0.$$

En dérivant par rapport à x on obtient

$$\forall x \in I, \quad 4x^3 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) - 2x - 2\varphi(x)\varphi'(x) + 1 - \varphi'(x) = 0.$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit que $\varphi'(0) = 1$. En dérivant encore on obtient que

$$\forall x \in I, \quad 12x^2 + 6\varphi(x)\varphi'(x)^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x) - 2 - 2\varphi'(x)^2 - 2\varphi(x)\varphi''(x) - \varphi''(x) = 0,$$

et donc $\varphi''(0) = -4$. Ainsi la tangente à $\mathcal{C}$ au point (0,0) est la droite d'équation $y = x$, et $\mathcal{C}$ se trouve « sous » cette tangente (c'est-à-dire dans le demi-plan d'équation $y \leqslant x$) au voisinage de (0,0).

Au point (1,1), seule la dérivée par rapport à x est non-nulle. On exprime donc x en fonction de y. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe des ouverts J et I de $\mathbb{R}$ contenant 1 et $\psi : J \to I$ de classe C^∞ tels que pour tout $(x, y) \in I \times J$ on a $f(x, y) = 0$ si et seulement si $x = \psi(y)$. Pour tout $y \in J$ on a

$$\psi(y)^4 + y^3 - \psi(y)^2 - y^2 + \psi(y) - y = 0$$

En dérivant on obtient

$$4\psi(y)^3\psi'(y) + 3y^2 - 2\psi(y)\psi'(y) - 2y + \psi'(y) - 1 = 0,$$

et donc $\psi'(1) = 0$ (comme on pouvait s'y attendre du fait que $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 0\ldots$). En dérivant à nouveau on a

$$12\psi(y)^2\psi'(y)^2 + 4\psi(y)^3\psi''(y) + 6y - 2\psi'(y)^2 - 2\psi(y)\psi''(y) - 2 + \psi''(y) = 0,$$

d'où $\psi''(1) = -\frac{4}{3}$. On en déduit que la tangente à $\mathcal{C}$ au point (1,1) est la droite d'équation $x = 1$, et que $\mathcal{C}$ se trouve « à gauche » de cette tangente au voisinage de (1,1).

7 Intégrales multiples

Exercice 2

1. La fonction $(t, x) \mapsto \frac{e^{(t^2+1)x^2}}{t^2+1}$ est de classe C^1 sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale, la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{(t^2+1)x^2}}{t^2 + 1}\, dt = -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2}\, dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2x^2}\, dt$$

2. La fonction f est également de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc h est de classe C^1 et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = g'(x) + 2f'(x)f(x) = g'(x) + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on effectue le changement de variable $t = xu$, $dt = x\, du$, ce qui donne

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = x \int_0^1 e^{-u^2x^2}\, dt.$$

Ainsi pour tout $x \neq 0$ on a $h'(x) = 0$, ce qui prouve que h est constante sur $\mathbb{R}$.
3. On a

$$h(0) = g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2}\, dt = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, pour tout $x \geqslant 0$ on a

$$0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2}\frac{\pi}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Puisque h est constante sur $\mathbb{R}$, cela implique que

$$f(x)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}.$$

Cela prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3

1. La fonction $(t,x) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ comme quotient de composées de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas. En outre pour tout $(t,x) \in (\mathbb{R}_+)^2$ on a

$$0 \leqslant \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} dt \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ est convergente, donc par le théorème de continuité sous l'intégrale on obtient que ψ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $x_0 > 0$. On montre que ψ est dérivable sur $\left]\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$. L'application $(t,x) \mapsto \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+ \times \left]\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$. En outre pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \left]\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$ on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-(t^2+1)x}}{t^2+1} \right| = e^{-(t^2+1)x} \leqslant e^{-(t^2+1)\frac{x_0}{2}}.$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+1)\frac{x_0}{2}}\, dt$ est convergente, donc par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on obtient que ψ est dérivable sur $\left]\frac{x_0}{2}, +\infty\right[$, et donc en particulier en x_0, et

$$\psi'(x_0) = -\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+1)x_0}\, dt.$$

Ceci étant valable pour tout $x_0 > 0$, cela prouve en particulier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On a

$$\psi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Pour tout $x \geqslant 0$ on a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{t^2+1}\, dt \leqslant \frac{\pi}{2} e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

4. Soit $x > 0$. On a vu que

$$\psi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-(t^2+1)x}\, dt = -e^{-x} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x}\, dt.$$

On effectue le changement de variables $s = \sqrt{x} t$, $ds = \sqrt{x} dt$, et on obtient

$$\psi'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

5. On a alors

$$\int_0^{+\infty} \psi'(x)\, dx = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx \times \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds$$

Dans la première intégrale on effectue le changement de variables $x = s^2$, $dx = 2sds$, ce qui donne bien l'égalité demandée.

6. D'autre part on a

$$\int_0^{+\infty} = \lim_{x \to \infty} f(x) - \lim_{x \to 0} f(0) = -\frac{\pi}{2},$$

et donc

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4

$$\frac{2}{3}\ln(2) \quad 2 \quad 16$$

Exercice 5

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{30}$$

Exercice 6

$$\frac{3}{20} \quad \frac{2}{75} \quad \sin(2)\ln(2) \quad \frac{275}{54} \quad 4\ln(2) - \frac{11}{4}$$

Exercice 7

$$\frac{22}{3} \quad 4 \quad \frac{8\sqrt{2}-2}{3}$$

Exercice 8

$$\frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

Exercice 9

$$\frac{(1-z_0)^3}{6} \quad \frac{1}{24}$$

Exercice 10

$$\frac{\pi}{2}\left(3 - \frac{1}{2}\right)$$

Exercice 11

$$4\pi(\sin(1) - \cos(1)) \quad ; \quad 8\pi$$

Exercice 12

$$abc\,\mathrm{Vol}(B(0,1)) = \frac{4\pi abc}{3}$$

Exercice 13

$$\frac{32}{9}$$

Exercice 14

$$\frac{4a^4b}{15}-\frac{ab^2}{3}$$

9 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Exercice 2

Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on pose $F(x,y,z)=(4xy+2xz+4y-z, xy+xz+2x-z)\in\mathbb{R}^2$. Ainsi on a $\mathcal{C}=F^{-1}(\{(0,0)\})$. D'autre part

$$\operatorname{Jac}F(0,0,0)=\begin{pmatrix}0 & 4 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

La matrice $\operatorname{Jac}F(0,0,0)$ est de rang 2, donc $\operatorname{Jac}F(0,0,0)$ est de rang 2 au voisinage de (0,0,0). Cela prouve que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de dimension 1 au voisinage de (0,0,0). En outre la tangente à $\mathcal{C}$ en (0,0,0) est

$$\ker\operatorname{Jac}F(0,0,0)=\mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ on pose $F(x,y,z)=xy+xz+2x+2y-z\in\mathbb{R}$. Ainsi on a $\mathcal{S}=F^{-1}(\{0\})$. On a

$$\operatorname{Jac}F(0,0,0)=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

La matrice $\operatorname{Jac}F(0,0,0)$ est de rang 1, donc $\operatorname{Jac}F(0,0,0)$ est de rang 1 au voisinage de (0,0,0). Cela prouve que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de dimension 2 au voisinage de (0,0,0). En outre le plan tangent à $\mathcal{S}$ en (0,0,0) est

$$\ker\operatorname{Jac}F(0,0,0)=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}^{\perp}=vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right).$$

Exercice 4

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a $\nabla F(x,y)=(2x,-2y)$. Ainsi ∇F ne s'annule qu'en (0,0), où F vaut 0. Cela prouve que pour tout $\alpha\neq 0$ l'ensemble défini par l'équation $F(x,y)=\alpha$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $F^{-1}(\{0\})$ n'est pas une sous-variété au voisinage de (0,0). Saurez-vous le justifier ?

Exercice 7

7. Soit $t\in]a,b[$. Soit F une équation pour M au voisinage de $\gamma(t)$. L'application $s\mapsto F(\gamma(x))$ est bien définie, différentiable et nulle au voisinage de t. Ainsi on a

$$d_{\gamma(t)}F(\gamma'(t))=0.$$

Cela prouve que $\gamma'(t)\in\ker d_{\gamma(t)}F=T_{\gamma(t)}M$.

8. Soit φ un paramétrage local de M en a, défini sur un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^p$, avec $\varphi(0)=a$. Puisque $h\in T_aM=\operatorname{Im}d_0\varphi$, il existe $\eta\in T_0\mathbb{R}^p\simeq\mathbb{R}^p$ tel que $d_0\varphi(\eta)=h$. Pour $\varepsilon>0$ assez petit on a $t\chi\in\mathcal{V}$ si $|t|<\varepsilon$. On note alors $\gamma(t)=\varphi(t\eta)$ pour tout $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$. Cela définit une courbe $\gamma:]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ de classe C^1, on a bien $\gamma(0)=\varphi(0)=a$ et $\gamma'(0)=d_0\varphi(\eta)=h$.

10 Intégrales curvilignes

Exercice 2

$$\frac{69}{4} \quad 2\sin(1) - 1 \quad -\frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3

9.

$$0 \quad -\frac{1}{15}$$

10. La forme ω n'est pas exacte car l'intégrale d'une forme exacte le long d'une courbe paramétrée ne dépend que des points de départ et d'arrivée.

Exercice 4

2π

Exercice 5

$$-\frac{a^3\pi}{4} \quad ; \quad 4ab\pi(a-b).$$

Exercice 6

$$\frac{\pi}{2} - 1$$