Chapitre 6

Théorème de l'inversion locale - Théorème des fonctions implicites

Le but de ce chapitre est de montrer deux applications importantes de la notion de différentiabilité. Ces deux théorèmes sont assez proches dans la mesure où on obtient assez facilement l'un comme conséquence de l'autre, mais les énoncés et surtout les applications sont finalement bien distincts.

6.1 Théorème de l'inversion locale

On considère une application f de classe C^1 d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a \in \mathcal{U}$.

On a dit que l'application affine $x \mapsto f(a) + d_a f(x-a)$ est une bonne approximation de la fonction f au voisinage du point a. Le but de ce paragraphe est de voir s'il est possible de faire un lien entre le fait que f est une bijection et le fait que sa différentielle en tout point de $\mathcal{U}$ est elle-même bijective. Tout d'abord il est facile de voir que si f est inversible, alors sa différentielle l'est également en tout point :

Proposition 6.1. *On suppose que f réalise un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$. Alors $n = p$ et pour tout $a \in \mathcal{U}$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ d'inverse $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$.*

La démonstration repose simplement sur le calcul de la différentielle d'une fonction composée :

Démonstration. On a $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$. En différentiant on obtient que pour tout $a \in \mathcal{U}$ on a

$$d_{f(a)}(f^{-1}) \circ d_a f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} .$$

De même on a $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}$ donc pour tout $b \in \mathcal{V}$

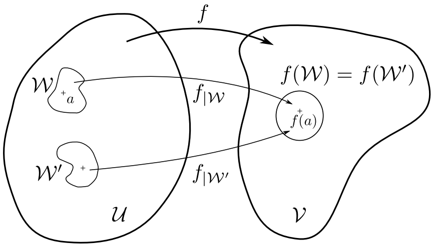
$$d_{f^{-1}(b)} f \circ d_b(f^{-1}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} .$$

Avec $b = f(a)$ on obtient que

$$d_a f \circ d_{f(a)}(f^{-1}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p} .$$

Cela prouve que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ sont isomorphes (ce qui implique que $n = p$), et $d_a f$ et $d_{f(a)} f^{-1}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. □

En dimension 1, on sait qu'une fonction de classe C^1 d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas est injective, et en particulier elle réalise une bijection de I dans $f(I)$. En outre la réciproque est-elle même de classe C^1, donc f réalise un C^1 difféomorphisme de



Sous l'hypothèse que $d_a f$ est inversible, le théorème de l'inversion locale assure l'existence du voisinage $\mathcal{W}$ de a tel que f réalise un difféomorphisme de $\mathcal{W}$ sur $f(\mathcal{W})$. Cependant rien n'empêche l'existence de $b \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$ tel que $f(b) = f(a)$, donc on ne pourra pas conclure à l'injectivité globale. Cependant

- *le difféomorphisme entre $\mathcal{W}$ et $f(\mathcal{W})$ va tout de même nous rendre bien des services,*
- *et si par ailleurs on peut montrer l'injectivité globale, alors on aura un difféomorphisme global (c'est le corollaire 6.3).*

FIGURE 6.1 – Théorème de l'inversion locale

I dans $f(I)$. Il s'agit même d'un C^k-difféomorphisme si f est de classe C^k.

Tout cela repose sur le théorème de Rolle qui dit en gros que si on se déplace sur une droite, pour pouvoir revenir au point de départ il faut nécessairement faire demi-tour et donc être à l'arrêt à un certain moment.

Ce n'est plus le cas en dimension supérieure. Sur un plan, on peut sans problème revenir au point de départ sans jamais être à l'arrêt.

***Exercice* 1.** On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (e^x \cos(y), e^x \sin(y)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Montrer que la différentielle de f est inversible en tout point.
3. Montrer que f n'est pas injective.
4. On considère l'application φ qui à $\theta \in [0, 2\pi]$ associe $\varphi(\theta) = f(0, \theta)$. Montrer que φ est de classe C^∞, que sa dérivée ne s'annule jamais, et que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$.

À la lumière de cet exemple on comprend qu'on ne pourra pas obtenir l'injectivité (propriété globale) à partir de l'inversibilité de la différentielle (propriété locale).

On va néanmoins l'obtenir localement : si la différentielle de f est inversible en un point, alors f réalise un difféomorphisme au voisinage de ce point. Ce n'est pas aussi fort qu'en dimension 1, mais c'est déjà un résultat très important qui illustre bien l'intérêt d'étudier la différentielle (il est bien plus facile de montrer qu'une application linéaire est inversible que de montrer directement qu'une fonction est localement inversible en un point).

Théorème 6.2 (Théorème de l'inversion locale)**.** *Soit f une fonction de classe C^k (avec $k \geqslant 1$) d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathcal{U}$. Si $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ alors $n = p$ et il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de a dans $\mathcal{U}$ tel que la restriction de f à $\mathcal{W}$ réalise un C^1 difféomorphisme de $\mathcal{W}$ dans $f(\mathcal{W})$.*

Heuristique. Soit $a \in \mathcal{U}$. Étant donné y proche de $f(a)$, on cherche à montrer que l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution x proche de a. Pour cela on écrit

$$f(x) = f(a) + d_a f(x - a) + \dots$$

où les points de suspension désignent un petit reste. Si $d_a f$ est inversible et si on s'autorise à oublier ce reste, alors on peut écrire

$$y = f(x) \quad \underset{\approx}{\iff} \quad x = a + (d_a f)^{-1}(y - f(a)) + \dots$$

On obtient bien une unique solution, qui se trouve être proche de a. La démonstration rigoureuse du théorème repose sur le théorème du point fixe 2.17 :

Démonstration. Pour $y \in \mathbb{R}^p$ on considère l'application $\phi_y : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\phi_y(x) = x - (d_a f)^{-1}(f(x) - y).$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, ϕ_y est de classe C^k sur Ω, sa différentielle ne dépend pas du paramètre y, et au point a on a

$$d_a \phi_y = d_a \phi_0 = 0.$$

Par continuité des dérivées partielles et donc de la différentielle, il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r) \subset \mathcal{U}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^p$ et $x \in B(a,r)$ on a

$$|||d_x f||| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Pour $y \in \mathbb{R}^p$ et $x_1, x_2 \in \overline{B}(a,r)$, on a alors d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\|\phi_y(x_1) - \phi_y(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|.$$

Cela prouve que ϕ_y est contractante. D'autre part, par continuité de l'application linéaire $(d_a f)^{-1}$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B(f(a), \delta)$ on a

$$\left\|(d_a f)^{-1}(f(a) - y)\right\| \leqslant \frac{r}{2}.$$

Pour $x \in \overline{B}(a,r)$ et $y \in B(f(a), \delta)$ on a donc

$$\|\phi_y(x) - a\| \leqslant \|\phi_y(x) - \phi_y(a)\| + \|\phi_y(a) - a\| \leqslant \frac{1}{2}\|x - a\| + \frac{r}{2} \leqslant r.$$

Ainsi ϕ_y envoie la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans elle-même. On peut donc appliquer le thérème du point fixe. Pour tout $y \in B(f(a), \delta)$ il existe un unique $x \in \overline{B}(a,r)$ tel que $\phi_y(x) = x$, soit $f(x) = y$. Notant $g(y)$ ce point fixe, g est donc une bijection de $B(f(a), \delta)$ dans son image $\mathcal{W} \subset \overline{B}(a,r)$ par g, et g est la réciproque de la restriction de f à $\mathcal{W}$.

Il reste à montrer que g est une application de classe C^k. En utilisant la version continue du théorème du point fixe (théorème 2.18) et le fait que l'application $(x,y) \mapsto \phi_y(x)$ est continue, on obtient directement que g est continue. Pour obtenir le caractère C^k, il faudrait montrer une version C^k du théorème du point fixe, ce qu'on ne fera pas ici. □

Corollaire 6.3 (Théorème de l'inversion globale)**.** *Soit f une application de l'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ dans l'ouvert $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^p$. On suppose que f est bijective, de classe C^k ($k \geqslant 1$) et que pour tout $a \in \mathcal{U}$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme. Alors $n = p$ et f est un difféomorphisme de classe C^k de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$.*

On obtient finalement dans ce corollaire une propriété globale, mais la propriété d'injectivité qui faisait défaut pour l'exemple vu en début de paragraphe est ici ajoutée aux hypothèses. Rien d'extraordinaire donc…

Cet énoncé du théorème de l'inversion globale est bien pratique, mais il faut être conscient qu'il n'apporte pas grand chose par rapport au théorème de l'inversion locale 6.2. Il suffit de regarder la preuve pour s'en convaincre.

Démonstration. Il suffit de montrer que f^{-1} est de classe C^k au voisinage de tout point de $\mathcal{V}$. Soit $b \in \mathcal{V}$ et $a = f^{-1}(b)$. D'après le théorème de l'inversion locale appliqué en a, il existe des voisinages ouverts $\tilde{\mathcal{U}}$ de a dans $\mathcal{U}$ et $\tilde{\mathcal{V}}$ de b dans $\mathcal{V}$ tels que f réalise un difféomorphisme de classe C^k de $\tilde{\mathcal{U}}$ dans $\tilde{\mathcal{V}}$. En particulier la restriction de f^{-1} à $\tilde{\mathcal{V}}$ est de classe C^k. D'où le résultat. □

6.2 Théorème des fonctions implicites

On revient maintenant sur les lignes de niveau d'une fonction. Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème des fonctions implicites, qui permet de les paramétrer. Au moins localement. Et sous certaines hypothèses.

Pourquoi accorder tant d'importance à ces lignes de niveau ? Tout simplement parce que bien souvent les ensembles qui nous intéressent sont définis par une équation de la forme $F(x) = 0$ pour une certaine fonction F. Par exemple le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre (0,0) et de rayon 1 peut être vu comme l'ensemble des solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

C'est une ligne de niveau.

Paramétrer ce cercle signifie qu'on aimerait le voir comme le graphe d'une fonction régulière, disons au moins de classe C^1. Manifestement, le cercle n'est le graphe d'aucune fonction, ni d'une fonction $y = f(x)$, ni d'une fonction $x = f(y)$. Par contre le demi-cercle supérieur est le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in]-1, 1[$, le demi cercle inférieur est le graphe de la fonction $x \mapsto -\sqrt{1 - x^2}$ pour $x \in]-1, 1[$, le demi-cercle de droite peut être vu comme le graphe de la fonction $y \mapsto x = \sqrt{1 - y^2}$ pour $y \in]-1, 1[$, et de même pour le demi-cercle de gauche. Ainsi le cercle peut être vu comme le graphe d'une fonction au voisinage de n'importe lequel de ses points (voir figure 6.1). A condition tout de même de ne pas avoir peur de retourner le repère, car au voisinage du point (1,0) on ne pourra jamais voir le cercle comme le graphe d'une fonction qui exprime y en fonction de x.

Au début du cours on a introduit les lignes de niveau d'une fonction pour mieux comprendre la fonction en question. Ici la démarche est inverse. On va regarder la fonction F pour mieux comprendre ses lignes de niveau.

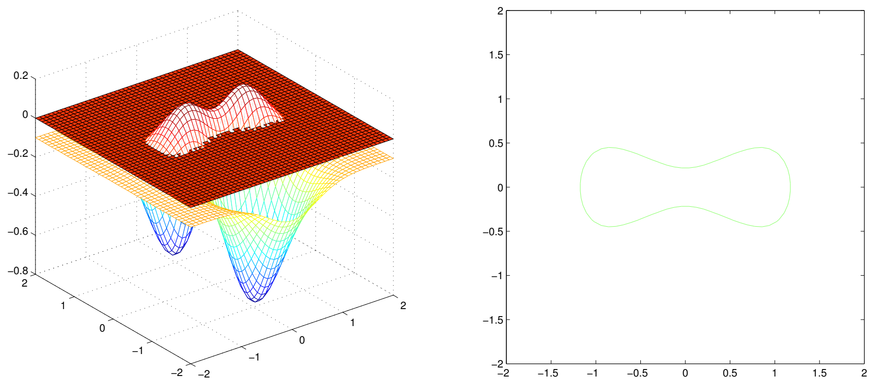


FIGURE 6.2 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto (0,2 + x^2 - 2y^2)e^{-2x^2-y^2} - 0,1$, coupé par le plan d'équation $z = 0$, ainsi que la ligne de niveau correspondante.

Théorème 6.4 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}^p$ une application de classe C^k avec $k \geqslant 1$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tel que $f(a, b) = 0$ et la différentielle partielle $D_y f(a, b)$ est inversible. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans $\mathbb{R}^m$, un voisinage $\mathcal{W}$ de b dans $\mathbb{R}^p$ et une application $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ de classe C^k tels que $\mathcal{V} \times \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ et*

$$\forall x \in \mathcal{V}, \forall y \in \mathcal{W}, \quad f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x).$$

En outre on peut choisir $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de sorte que la différentielle $D_y f(x,y)$ est inversible pour tout $(x,y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ et

$$d\phi(x) = -D_y f(x,\phi(x))^{-1} \circ D_x f(x,\phi(x)).$$

Ici $D_y f(a,b)$ est la différentielle de l'application $y \in \mathbb{R}^p \mapsto f(a,y) \in \mathbb{R}^p$ au point b. Au départ f est une fonction de $n+p$ variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Si on fixe n variables, on obtient une fonction de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. La différentielle partielle $D_y f(a,b)$ est alors la différentielle de cette fonction au point b, les n premières variables étant fixées à $a = (a_1, \dots, a_n)$. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est

$$\operatorname{Jac}_y f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+p}}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{m+1}}(a,b) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{m+p}}(a,b) \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R}).$$

***Exercice* 2.** Ré-écrire cet énoncé proprement dans le cas où $m = p = 1$.

Heuristique. Si on oublie les restes d'ordre 2 on peut écrire

$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b)}_{=0} + d_x f(a,b)(x-a) + d_y f(a,b)(y-b) + \dots$$

On a alors

$$f(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = b - d_y f(a,b)^{-1} \circ d_x f(a,b)(x-a) + \dots$$

C'est bien une formule donnant y en fonction de x.

Reste à rendre cette observation un peu plus rigoureuse. Pour cela on utilise le théorème de l'inversion locale :

Démonstration. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on pose $g(x,y) = (x, f(x,y)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Cela définit une fonction de classe C^k sur $\mathcal{U}$. En outre on a

$$\det \operatorname{Jac} g(a,b) = \begin{vmatrix} I_m & 0_{m,p} \\ \operatorname{Jac}_x f(a,b) & \operatorname{Jac}_y f(a,b) \end{vmatrix} = \det \operatorname{Jac}_y f(a,b) \neq 0,$$

où I_m est la matrice identité de taille $m \times m$ et $0_{m,p}$ la matrice à m lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls.

On peut donc appliquer le théorème de l'inversion locale. Il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{U}}$ de (a,b) dans $\mathcal{U}$ tel que g réalise un difféomorphisme de classe C^k de $\tilde{\mathcal{U}}$ sur son image. Soient $\tilde{\mathcal{V}}$ un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathcal{W}$ un voisinage ouvert de b dans $\mathbb{R}^p$ tels que $\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W} \subset \tilde{\mathcal{U}}$. Comme $g(\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{m+p}$ contenant $(a,0)$, il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$ de a dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{V} \times \{0\} \subset g(\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{W})$. Étant donné $x \in \mathcal{V}$ il existe donc un unique $y \in \mathcal{W}$ (qu'on note $\phi(x)$) tel que $(x,0) = g|_{\mathcal{V} \times \mathcal{W}}(x,\phi(x))$. Comme $(x,\phi(x)) = (g|_{\mathcal{V} \times \mathcal{W}})^{-1}(x,0)$, ϕ est une fonction de classe C^k. Pour tout $x \in \mathcal{V}$ on a donc

$$f(x,\phi(x)) = 0$$

En différentiant on obtient

$$d_x f(x,\phi(x)) + d_y f(x,\phi(x)) d\phi(x) = 0,$$

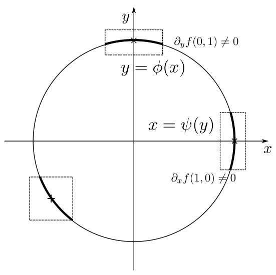
ce qui donne l'expression pour la différentielle de ϕ. □

Remarque 6.5. Il est fortement déconseillé de chercher à retenir la formule pour la différentielle de ϕ. Par contre il faut savoir qu'elle existe et comment la retrouver.

Exemple 6.6. On revient sur le cercle

$$\mathcal{C} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 - x^2 - y^2 = 0 \right\}.$$

Alors on a $\mathcal{C} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x,y) = 0 \right\}$, où $f : (x,y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$ est de classe C^∞. Les dérivées partielles sont $\partial_x f : (x,y) \mapsto -2x$ et $\partial_y f : (x,y) \mapsto -2y$. La dérivée par rapport à y est non nulle en tout point de $\mathcal{C}$ sauf en (1,0) et (-1,0). Autour de tout point de $\mathcal{C}$ exceptés (1,0) et (-1,0) on peut effectivement voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant y en fonction de x. La dérivée par rapport à x est non nulle en tout point de $\mathcal{C}$ sauf en (0,1) et (0,-1). Et c'est effectivement autour de ces deux points qu'on ne peut pas voir le cercle comme le graphe d'une fonction donnant x en fonction de y.



C'est une bonne idée de bien avoir cet exemple du cercle en tête. Il peut par exemple arriver qu'on oublie quelle dérivée doit être non nulle pour pouvoir exprimer telle variable en fonction de telle autre. Il est bon de se remémorer le cercle et les quatre points pour lesquels on sait quelle dérivée est nulle et quelle variable peut être exprimée en fonction de l'autre.
Dans le cas où $m \neq p$, on peut aussi penser au fait que la différentielle partielle qui est supposée inversible est nécessairement une application entre espaces de mêmes dimensions.

FIGURE 6.3 – Théorème des fonctions implicites pour $f : (x,y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$.

6.3 Exercices

6.3.1 Inversion locale

***Exercice* 3.** Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Montrer que f définit une application surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
3. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
  a. Calculer la matrice jacobienne de f en (x_0, y_0).
  b. Montrer que f définit un C^1-difféomorphisme local au voisinage de (x_0, y_0).
4. L'application f réalise-t-elle un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

***Exercice* 4.** Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est bien définie et réalise en tout point un difféomorphisme local de classe C^1, mais n'est pas un difféomorphisme global.

***Exercice* 5.** On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y) \end{array} \right.$$

Montrer que l'image de f est un ouvert strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$.

***Exercice* 6.** Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a| + |b| < r$ le problème

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5x^2y^3 & = a \\ x - y + \sin(x^6 y^3) & = b \end{cases}$$

admet une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

***Exercice* 7.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x + a\cos(y), y + b\sin(x)) \end{array} \right.$$

1. A quelle condition sur (a, b) la fonction f est-elle un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.
2. Montrer que pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(t_1) - \sin(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2|$.
3. En déduire que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

***Exercice* 8.** On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la différentielle de f en 0 est un isomorphisme de $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de voisinage de 0 sur lequel f est injective.
4. Quel est le but de cet exercice ?

6.3.2 Fonctions implicites

***Exercice* 9.** On considère l'équation

$$2xy - 2x + y - 2 = 0 \tag{$*$}$$

1. Montrer qu'il existe une fonction φ sur un domaine $D_\varphi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in D_\varphi \text{ et } y = \varphi(x).$$

2. Montrer qu'il existe une fonction ψ sur un domaine $D_\psi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$(x, y) \text{ est solution de } (*) \quad \Longleftrightarrow \quad y \in D_\psi \text{ et } x = \psi(y).$$

3. Quel lien peut-on faire entre les fonctions φ et ψ ?

***Exercice* 10.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Montrer que pour x suffisament proche de 0 il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $f(x, y(x)) = 0$. Montrer, sans résolution explicite, que la fonction y ainsi définie au voisinage de 0 est dérivable et pour x proche de 0 :

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.$$

***Exercice* 11.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1).$$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$. Montrer qu'il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = (0, 0)$ pour tout $x \in I$.

***Exercice* 12.** Décrire l'allure de l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\right\}$ au voisinage des points $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

***Exercice* 13.** On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe au point (1,1) et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente.

***Exercice* 14.** On considère le système d'équations

$$\begin{cases} x^4 & + & y^3 & + & z^4 & + & t^2 & = & 0, \\ x^3 & + & y^2 & + & z^2 & + & t & = & 2, \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (0,-1,1,0) et une fonction $\varphi : t \mapsto (x(t), y(t), y(t))$ de classe C^1 au voisinage de 0 tels que $(x, y, z, t) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x, y, z) = \varphi(t)$.
2. Calculer la dérivée de φ en 0.

***Exercice* 15.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3,$$

puis la surface $\mathcal{S}$ d'équation $f(x, y, z) = 0$.
1. Déterminer l'équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ au point (1,1,1).
2. Vérifier qu'au voisinage du point (1,1,1), la surface $\mathcal{S}$ est décrite par une équation de la forme $z = \phi(x, y)$ où ϕ est une fonction de classe C^∞ définie au voisinage de (1,1).
3. Écrire le développement limité de ϕ à l'ordre 2 au point (1,1).
4. Donner la matrice Hessienne de ϕ au point (1,1).
5. Quelle est la position de $\mathcal{S}$ par rapport à son plan tangent au point (1,1).

***Exercice* 16.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'équation $(x - a)(b - x) + \varepsilon x^3 = 0$ admet trois solutions distinctes (qu'on note $x_1(\varepsilon)$, $x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ avec $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$). Donner un développement asymptotique de x_1, x_2 et x_3 jusqu'à l'ordre $0(\varepsilon^2)$.

***Exercice* 17.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ est $A_0 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant n valeurs propres réelles distinctes. Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est proche de A_0, alors A possède également n valeurs propres réelles distinctes, et ces valeurs propres dépendent continuement de A.