Chapitre 3

Dérivées partielles, différentielle, fonctions de classe C^1

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de dérivée pour une fonction f de plusieurs variables. L'objectif est évidemment de donner une définition qui permet de retrouver autant que possible toutes les bonnes propriétés de la dérivation d'une fonction d'une variable :

- En tout point x_0 où la fonction est dérivable, la dérivée doit permettre de définir une fonction simple qui approche bien f au moins pour des points proches de x_0, comme c'est le cas pour l'application $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ en dimension 1.
- En particulier on attend d'une fonction dérivable qu'elle soit continue.
- La dérivée doit permettre d'étudier les variations de f, localiser et étudier les extréma.
- ...

Pour tout ce chapitre, on se donne un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, une fonction f de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{U}$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Dérivées partielles

Définition 3.1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de f existe au point a si l'application
$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n)$$
(définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$) est dérivable en 0. Dans ce cas on note
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \quad \text{ou} \quad \partial_k f(a)$$
cette dérivée.
- On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de f existe sur $\mathcal{U}$ si elle existe en tout point de $\mathcal{U}$.

Les dérivées partielles ne sont finalement rien de plus que des dérivées au sens usuel. Pour dériver par rapport à une variable on considère que toutes les autres sont des constantes et on dérive alors par rapport à la variable qui nous intéresse comme on a l'habitude.

Remarque 3.2. Souvent, on note (x, y) et (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2) et (x_1, x_2, x_3) les points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ respectivement. Dans ce cas on notera par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$ la dérivée partielle par rapport à la première variable. C'est une habitude à laquelle on peut se fier. Mais les choses peuvent devenir ambiguës quand d'autres variables entrent en jeu, typiquement lorsqu'on change de coordonnées. Il faudra donc être vigilant en lisant et en écrivant des calculs faisant intervenir des dérivées partielles...

***Exercice* 1.** 1 On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions

$$f_1 : (x,y) \mapsto x \in \mathbb{R}, \quad f_2 : (x,y) \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad f_3 : (x,y) \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer les que f_1, f_2, f_3 admettent en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles par rapport à x et à y, et les expliciter.

***Exercice* 2.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles en tout point des fonctions définies par

$$f_1(x,y) = e^x \cos(y), \quad f_2(x,y) = \sqrt{1 + x^2y^2}, \quad f_3(x,y) = x^y \quad (\text{pour } x > 0).$$

L'exemple suivant montre que l'étude des dérivées partielles ne répond pas à toutes nos attentes puisqu'une fonction peut avoir des dérivées partielles bien définies en tout point sans nécessairement être continue :

Remarque 3.3. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles selon x et selon y mais n'est pas continue en (0,0) (voir l'exemple 2.7)

L'existence des dérivées partielles en (0,0) pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ assure que f « paraît continue » tant qu'on se déplace le long des axes des abscisses ou des ordonnées. Dans l'exemple précédent, le problème vient du fait que ce n'est plus du tout le cas si on approche du point (0,0) en suivant par exemple la droite d'équation $x = y$.

Ce problème peut être évité si au lieu de ne considérer que les dérivées partielles, c'est-à-dire les dérivées selon les directions données par les axes, on considère les dérivées selon toutes les directions possibles :

Définition 3.4. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f admet une dérivée en a suivant v si l'application $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. La dérivée $\varphi'(0)$ est alors appelée dérivée de f en a suivant v.

Remarque 3.5. Si elle existe, la k-ième dérivée partielle de f au point a n'est autre que la dérivée de f en a suivant e_k.

***Exercice* 3.** Calculer la dérivée de l'application $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ au point $a = (1,2)$ suivant le vecteur $v = (3,5)$.

Remarque 3.6. Malheureusement cette nouvelle définition ne résoud pas notre problème, puisqu'une fonction peut admettre des dérivées selon tout vecteur en un point sans pour autant être continue en ce point. Considérons par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées selon tout vecteur en tout point mais n'est pas continue (voir exercice 13).

3.2 Fonctions différentiables

3.2.1 Différentielle

Définition 3.7. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire d_af de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + d_af(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|).$$

Autrement dit il existe une application ε_a définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\varepsilon_a(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \, \varepsilon_a(h).$$

Remarque 3.8. On écrira parfois $df(a)$ au lieu de $d_a f$.

Remarque 3.9. On rappelle (sinon ce sera vu en approfondissements mathématiques) qu'en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues. Cela signifie en particulier que

$$|||d_a(f)||| := \sup_{h\neq 0} \frac{\|d_a f(h)\|}{\|h\|}$$

est bien défini.

Proposition 3.10. *Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Avec les notations de la définition 3.7 on a $h \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant \|d_a f(h)\| + \|h\| \, \|\varepsilon_a(h)\| \leqslant \|h\| \left(|||d_a(f)||| + \|\varepsilon_a(h)\| \right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \qquad \square$$

Proposition 3.11. *Si f est différentiable en a, alors elle est dérivable en a suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et cette dérivée vaut $d_a f(v)$.*

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit on a

$$f(a+tv) = f(a) + d_a f(tv) + \|tv\| \, \varepsilon_a(tv) = f(a) + t d_a f(v) + \underset{t\to 0}{o}(t).$$

Cela prouve que $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 de dérivée $d_a f(v)$. $\square$

Exemples 3.12.
- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en a et dans ce cas $d_a f$ est l'application $h \mapsto h f'(a)$.
- Une application constante est différentiable en tout point de différentielle nulle.
- Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$L(a+h) = L(a) + L(h)$$

Ainsi L est différentiable en a de différentielle $d_a L = L$.

Proposition 3.13. *On suppose que f est différentiable en a. Alors toutes les dérivées partielles de f existent au point a et pour tout $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(v) = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Autrement dit :

$$d_a f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k^*,$$

où $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est la base duale de la base canonique.

Démonstration. Le fait que les dérivées partielles de f existent au point a résulte de la proposition 3.11 appliquée avec les vecteurs de la base canonique. Par linéarité de $d_a f$ on a

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_{k=1}^{n} v_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} v_k d_a f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a). \qquad \square$$

3.2.2 Plan tangent

On suppose que f est différentiable en a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note

$$g(x) = f(a) + d_a f(x - a)$$

(on note que cette définition a un sens même si f n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}^n$). Alors g est une application affine (une constante + une application linéaire) telle que

$$f(x) - g(x) = \underset{x \to a}{o}\left(\|x - a\| \right)$$

g est en fait la seule application affine à avoir cette propriété. L'image de $\mathbb{R}^n$ par l'application g est appelée plan tangent au graphe de f au point a.

Supposons que $n = 2$ et $p = 1$. Alors le graphe de f est une « surface » de $\mathbb{R}^3$, et le plan tangent au graphe de f est véritablement un plan de $\mathbb{R}^3$. C'est le plan qui est proche du graphe de f quand on « zoome » sur le point $(a, f(a))$ (voir figure 3.1).

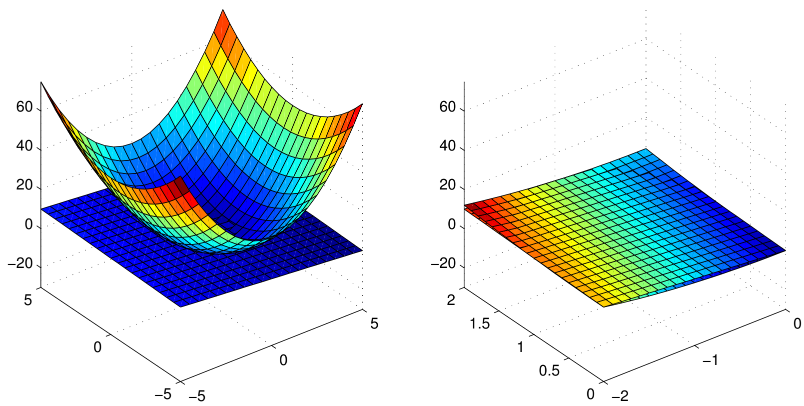

FIGURE 3.1 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2$ et son plan tangent au point (-1,1). *Si on zoome autour du point $(-1, 1, f(-1, 1))$, le graphe et le plan tangent paraissent quasiment confondus.*

3.2.3 Vecteur gradient

On suppose dans ce paragraphe que $p = 1$, c'est-à-dire que f est à valeurs réelles.

Définition 3.14. Soit $a \in \mathcal{U}$. On appelle gradient de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 3.15. *Pour tout $a \in \mathcal{U}$ le gradient $\nabla f(a)$ est l'unique vecteur tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle ,$$

où pour deux vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on a noté $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire usuel $\sum_{j=1}^{k} u_j v_j$.

Démonstration. C'est clair d'après la proposition 3.13. □

Le vecteur gradient indique en chaque point la direction de plus grande pente. Dans la montagne, si vous voulez prendre la pente la plus dure, il faut suivre le gradient de la fonction altitude. Si vous voulez descendre le plus possible, il faut au contraire suivre la direction opposée. Et si vous voulez garder la même altitude, c'est-à-dire rester sur votre ligne de niveau, il faut alors suivre une direction orthogonale. En particulier le vecteur gradient est en tout point orthogonal aux lignes de niveau (en un sens à préciser...).

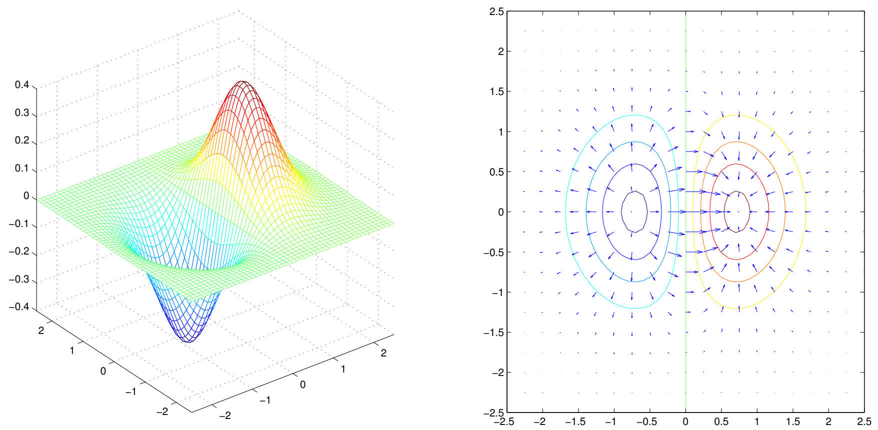

FIGURE 3.2 – Le graphe, les lignes de niveau, et le gradient de l'application $f : (x,y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.

***Exercice* 4.** Déterminer en tout point de $\mathbb{R}^2$ le vecteur gradient de l'application $f : (x,y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.

3.2.4 Matrice jacobienne

On revient au cas général où f peut être à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}^*$.

On introduit maintenant la matrice jacobienne d'une application différentiable. Il n'y a pas de concept nouveau, on donne simplement un nom à la matrice de la différentielle :

Définition 3.16. Si f est différentiable en a, alors on appelle matrice jacobienne de f en a et on note $\operatorname{Jac}_a f$ la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$:

$$\operatorname{Jac}_a f = \operatorname{Jac} f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Exemple 3.17. Coordonnées polaires : on considère sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'application $\psi : (r,\theta) \mapsto \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$. Alors ψ est différentiable et sa matrice jacobienne au point (r,θ) est

$$\operatorname{Jac} \psi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le fait que ψ est partout différentiable sera une conséquence du théorème 3.21.

***Exercice* 5.** Écrire la matrice jacobienne de l'application $(x,y,z) \mapsto (xyz, x^2y + y)$ en tout point de $\mathbb{R}^3$.

3.2.5 Addition et composition de fonctions différentiables

On termine cette section par la linéarité de la différentielle, puis par la composition de fonctions différentiables :

Proposition 3.18. *On suppose que f et g sont deux fonctions de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en a. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a de différentielle*

$$d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g.$$

La propriété suivante généralise la propriété de dérivation pour la composée de fonctions d'une variable réelle. Il n'y a pas particulièrement de difficulté nouvelle par rapport à la dimension 1, mais il faut être vigilant car les notations commencent à devenir un peu lourdes...

Proposition 3.19. *On suppose que $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(\mathcal{U})$ et $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $f(a)$. Alors l'application $g \circ f$ est différentiable en a de différentielle*

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f.$$

En termes matriciels on obtient

$$\mathrm{Jac}_a(g \circ f) = \mathrm{Jac}_{f(a)}\, g \,\mathrm{Jac}_a\, f.$$

Si on note $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ et $y_1, \dots, y_p$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^p$ cela donne

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

***Exercice* 6.** Démontrer les propositions 3.18 et 3.19. *Pour la proposition 3.19, la première égalité se montre exactement comme pour la dérivée d'une composition de fonction d'une variable, la deuxième égalité est une simple ré-écriture de la première en termes matriciels, et la troisième explicite pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de cette matrice* $\mathrm{Jac}_a(g \circ f)$*.*

La dernière formule de la proposition 3.19 n'est pas très sympathique à priori, mais une fois passée la (légitime) petite appréhension elle permet de calculer concrètement les dérivées partielles d'une fonction composée. Un petit exemple est sans doute utile ici :

Exemple 3.20. On considère une application différentiable f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on note

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Alors g est différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \times \frac{\partial (r\cos(\theta))}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \times \frac{\partial (r\sin(\theta))}{\partial r} \\ &= \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big). \end{aligned}$$

***Exercice* 7.** Avec les notations de l'exemple précédent, calculer $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en tout point de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

***Exercice* 8.** Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on note $\psi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On considère une fonction différentiable f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, puis on note $\tilde{f} = f \circ \psi$.

1. Montrer que $\tilde{f}$ est une fonction différentiable de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On note $(x, y) = \psi(r, \theta)$, $\overrightarrow{u_r} = (\cos(\theta), \sin(\theta)$ et $\overrightarrow{u_\theta} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Faire un dessin.

3. Montrer que $\partial_r \tilde{f}(r, \theta)$ est égale à la dérivée de f au point (x, y) et dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, tandis que $\partial_\theta \tilde{f}(r, \theta)$ vaut r fois la dérivée de f au point (x, y) et dans la direction $\overrightarrow{u_\theta}$.

⚠ Bien souvent pour « simplifier » les notations on écrit $f(r,\theta)$ au lieu de $\tilde{f}(r,\theta)$, et donc les dérivées partielles $\partial_r f$ et $\partial_\theta f$ désignent les dérivées partielles de la composée $\tilde{f} = f \circ \psi$. Cet abus de notation peut éventuellement être pratique pour celui qui a bien l'habitude, mais il est aussi très dangereux. Car si les fonctions f et $\tilde{f}$ désignent la même quantité physique en coordonnées cartésiennes ou polaires, ce sont bel et bien des fonctions différentes.

3.3 Fonctions de classe C^1

Dans ce chapitre, on a commencé par définir les dérivées partielles. Puis on a dit que ce n'était pas une notion de dérivée satisfaisante, en particulier parce que l'existence des dérivées partielles n'implique même pas la continuité. On a ensuite défini la notion de différentiabilité, qui elle est satisfaisante. C'est une notion plus forte, puisque l'existence de la différentielle implique en particulier l'existence des dérivées partielles. Malheureusement c'est aussi une notion plus compliquée, alors que les dérivées partielles ne sont finalement que des dérivées usuelles.

Le but de ce paragraphe est maintenant d'introduire les fonctions de classe C^1. Cela généralise la notion connue en dimension 1. Mais le véritable intérêt est que c'est une notion plus forte que la différentiabilité, et pourtant plus simple à vérifier. Ainsi, bien souvent, pour montrer qu'une fonction est différentiable, on montrera plutôt qu'elle est de classe C^1 (tout en gardant à l'esprit que ce n'est pas parce qu'une fonction n'est pas C^1 qu'elle n'est pas différentiable...)

Théorème 3.21. *On suppose que toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues au voisinage de $a \in \mathcal{U}$. Alors f est différentiable en a.*

Démonstration. Pour alléger les notations on suppose que $n = 2$. Le cas général se montre exactement de la même manière. Pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ avec h_1 et h_2 assez petits on peut définir

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

On a

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) \\
&= \int_0^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+t, a_2+h_2)\,dt + \int_0^{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+t)\,dt \\
&= h_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+sh_1, a_2+h_2)\,ds + h_2 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+sh_2)\,ds,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
r(h) = h_1 &\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+sh_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) ds \\
&+ h_2 \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) ds
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les dérivées partielles de f sont continues en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h_1, h_2 \in [-\delta, \delta]$ et $s \in [0,1]$ on a

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+sh_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon$$

et

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon.$$

Cela prouve que $|r(h)| \leqslant \varepsilon \max(|h_1|, |h_2|)$, et finalement $r(h) = \underset{h \to 0}{o}(\|h\|)$. D'où le résultat. $\square$

Définition 3.22. On dit que f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.

Définition 3.23. Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que f est un C^1 difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ si f est une bijection de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$, est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, et si sa réciproque f^{-1} est C^1 sur $\mathcal{V}$.

Remarque 3.24. Si f est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ est ouvert, alors $f(\mathcal{W})$ est ouvert comme image réciproque de $\mathcal{W}$ par l'application continue f^{-1}.

3.4 Inégalité des accroissements finis

On a déjà dit que le théorème de Rolle et ses applications (en particulier le théorème des accroissements finis) n'étaient plus valables pour des fonctions de plusieurs variables. Sous une condition de type convexité, on va tout de même pouvoir montrer un analogue à l'inégalité des accroissements finis.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1.

Théorème 3.25 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient $a, b \in \mathcal{U}$ tels que*

$$[a; b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0,1]\} \subset \mathcal{U}.$$

Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||.$$

Démonstration. On considère l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & f(a + t(b-a)) \end{array} \right.$$

Par composition de fonctions de classe C^1 on obtient que g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et

$$\forall t \in [0,1], \quad g'(t) = d_{a+t(b-a)} f(b-a).$$

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. On a alors

$$\|g'(t)\| \leqslant |||d_{a+t(b-a)} f||| \, \|b - a\| \leqslant \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle on a

$$\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| \leqslant |1 - 0| \, \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f||| \leqslant \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||.$$

D'où le résultat. $\square$

Corollaire 3.26. *On suppose que $\mathcal{U}$ est convexe. Si toutes les dérivées partielles de f sont nulles sur $\mathcal{U}$ alors f est constante sur $\mathcal{U}$.*

Remarque 3.27. Revenons sur le théorème 2.17. En général, pour montrer qu'une application est contractante, on utilise l'inégalité de la moyenne : si f est différentiable sur le convexe Ω et s'il existe $K \in [0, 1[$ tel que $\|df(x)\| \leqslant K$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est K-contractante sur Ω.

3.5 Équations aux dérivées partielles

On appelle équation aux dérivées partielles une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et qui fait intervenir les dérivées partielles de cette inconnue.

L'étude des équations aux dérivées partielles (EDP pour les intimes) est une branche importante de la recherche en mathématiques et ses applications sont très nombreuses en physique. La théorie « générale » des EDP dépasse largement le cadre de ce cours, mais on est tout de même capables de discuter les cas les plus simples.

En guise d'exemple, on considère le problème de transport suivant :

Exemple 3.28. Étant donnés $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, déterminer l'ensemble des fonctions $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \tag{3.1}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{3.2}$$

On connait la fonction u à l'instant initial $t = 0$, on cherche à déterminer ce qu'elle deviendra dans le futur, à partir d'une égalité faisant intervenir sa dérivée par rapport au temps t.

On commence par supposer que u est solution et on considère la fonction $\tilde{u}$ qui à $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ associe $\tilde{u}(t,y) = u(t, y+ct)$. $\tilde{u}$ est alors une fonction de classe C^1 (comme composée des fonctions u et $(t,y) \mapsto (t, y+ct)$. En outre pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, y+ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, y+ct) = 0.$$

Cela prouve que pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto \tilde{u}(t,y)$ est constante, et donc pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\tilde{u}(t,y) = \tilde{u}(0,y) = u_0(y).$$

Ainsi pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$u(t,x) = \tilde{u}(t, x-ct) = u_0(x-ct). \tag{3.3}$$

Cela prouve que s'il existe une solution, c'est forcément cette fonction là. Inversement on vérifie la fonction u ainsi définie est bien solution. Il s'agit encore de calculer les dérivées partielles d'une fonction composée : pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a bien $u(0,x) = u_0(x)$ et de plus

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -cu_0'(x-ct) + cu_0'(x-ct) = 0.$$

Cela prouve que u est solution. Finalement le problème (3.1)-(3.2) admet une unique solution, c'est la fonction u donnée par (3.3).

3.6 Exercices

***Exercice* 9.** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^n$.

***Exercice* 10.** Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ (où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$) n'est pas différentiable en 0.

***Exercice* 11.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)| \leqslant \|x\|_2^2 .$$

1. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle.
2. Interpréter ce résultat géométriquement.
3. Mêmes questions en remplaçant $\|x\|_2^2$ par $\|x\|_1^2$ et $\|x\|_\infty^2$.

***Exercice* 12.** Si une mole de gaz parfait occupe le volume V à la température T et à la pression P alors on a $PV = RT$, où R est une constante. Montrer qu'on a

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1 \quad \text{et} \quad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = R.$$

Attention, s'il n'y a pas de difficulté calculatoire dans cet exercice, il faut faire attention à l'utilisation des notations « physiques ».

***Exercice* 13** (Existence des dérivées directionnelles n'implique pas continuité)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en (0,0) une dérivée selon tout vecteur et la calculer.
2. Montrer que f n'est pas continue en 0.

***Exercice* 14.** Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs jacobiennes :

$$f_1 : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x^2 - z^2}{2}, \sin(x)\sin(y)\right), \quad f_2 : (x,y) \mapsto \left(xy, \frac{x^2}{2} + y^2, \ln\left(1 + x^2\right)\right).$$

***Exercice* 15.** Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Après en avoir vérifié l'existence, exprimer en fonction de f' les dérivées partielles des fonctions

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f\left(\frac{y}{x}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(z\sin(x)) \end{array} \right.$$

***Exercice* 16.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on pose

$$g_1(x) = f(x,-x), \quad g_2(x,y) = f(y,x), \quad g_3(x) = f(x, f(x,x)), \quad g_4(x,y) = f(y, f(x,x)).$$

Montrer que ces fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, et calculer leurs dérivées (partielles) en fonction des dérivées partielles de f.

***Exercice* 17.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

***Exercice* 18.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x y^3}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

***Exercice* 19.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \inf(x^2, y^2)$. Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

***Exercice* 20** (Coordonnées polaires)**.** On note $D = \mathbb{R}_- \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ on note $\psi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On admet que ψ réalise un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$ et $g = f \circ \psi$.
1. Montrer que g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. Sans chercher à expliciter ψ^{-1}, exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.

On pourra montrer que ψ est bien un difféomorphisme en utilisant le théorème de l'inversion globale. Ici on aurait pu le faire directement en explicitant ψ^{-1}.

***Exercice* 21.** Pour $(x,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $\psi(x,\theta) = (x, x\tan(\theta))$.
1. Montrer que ψ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $g = f \circ \psi$.
  a. Montrer que g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
  b. Calculer $\partial_x g$ en fonction des dérivées partielles de f.
  c. Interpréter « géométriquement » la différence entre $\partial_x g$ et $\partial_x f$.

***Exercice* 22.** Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kf(x,y).$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.

***Exercice* 23.** Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

***Exercice* 24** (Équation d'Euler)**.** Soient $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx) = t^\alpha f(x)$$

(f est positivement homogène de degré α) si et seulement si

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha f(x).$$