Chapitre 2

Continuité d'une fonction de plusieurs variables

Maintenant qu'on a défini la notion de limite pour des suites dans $\mathbb{R}^n$, la notion de continuité s'étend sans problème à des fonctions de plusieurs variables. En outre, bon nombre des propriétés des fonctions continues connues pour les fonctions d'une variable seront encore valables ici.

2.1 Fonctions continues

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.1. Soit $a \in \mathcal{D}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. On dit que f tend vers l en a et on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \quad \|x - a\| \leqslant \delta \implies \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 2.2. De même que pour la limite d'une suite, la limite d'une fonction en un point ne dépend pas du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^p$, qui sont des espaces de dimensions finies.

Les définitions suivantes sont sans surprise :

Définition 2.3. Soit $a \in \mathcal{D}$.

(i) On dit que f est continue en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

(ii) On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

***Exercice* 1.** **1.** Montrer qu'une fonction constante est continue.
2. Montrer que l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ définit une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4. *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit h une fonction continue de $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$.*

- *La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathcal{D}$ (l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).*
- *Si $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}$, alors fg est continue sur $\mathcal{D}$. Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors f/g est continue.*
- *Si $\mathcal{D}'$ contient l'image de g, alors la fonction $h \circ g$ est continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^m$.*

***Exercice* 2.** Montrer la proposition 2.4.

On appelle fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ une application qui s'écrit comme une somme de termes qui sont eux-mêmes des produits de fonctions coordonnées. En langage mathématiques, c'est une fonction de la forme

$$f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{|\alpha_1|+\dots+|\alpha_n| \leqslant N} c_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$$

avec $N \in \mathbb{N}$. Par exemples les fonctions suivantes sont polynômiales : $(x, y) \mapsto xy^4 + x^3y^2$, $(x, y, z) \mapsto x + xyz + y^2z^2$.

Une fraction rationnelle est une fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômiales.

Corollaire 2.5. *Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ est continue. Plus généralement toute fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est bien définie et continue sur ce domaine.*

On énonce maintenant le critère séquentiel pour la continuité en un point :

Proposition 2.6. *Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a la suite $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.*

Comme pour une fonction d'une variable réelle, cette propriété sert souvent à montrer qu'une fonction n'est pas continue.

Exemple 2.7. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(voir figure 2.1). La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. D'autre part on a

$$f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0 = f(0, 0),$$

et pourtant f n'est pas continue en (0,0). En effet si on note $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors u_n tend vers $(0, 0)$ mais $f(u_n)$ ne tend pas vers $f(0, 0)$ quand n tend vers $+\infty$.

Plutôt que d'utiliser des suites et la proposition 2.6, on peut préférer utiliser la composition de fonctions continues pour aboutir à la même conclusion : l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t) \in \mathbb{R}^2$ est continue en 0, donc si f est continue en $(0, 0) = \varphi(0)$ l'application $f \circ \varphi$ est continue en 0. Or $f(\varphi(0)) = 0$ et $f(\varphi(t)) = \frac{1}{2}$ pour tout $t \neq 0$, ce qui donne une contradiction et prouve par l'absurde que f n'est pas continue en (0,0).

⚠ C'est une erreur trop fréquente que de se contenter de vérifier la continuité des fonctions $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ pour prouver la continuité de f. On voit bien sur cet exemple que ce n'est malheureusement pas suffisant...

La proposition qui suit permet elle de montrer efficacement la continuité d'une fonction en un point de $\mathbb{R}^2$:

Proposition 2.8. *Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en $a = (a_1, a_2)$ si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en 0 et telle que pour tous $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a*

$$|f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon(r).$$

Démonstration. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Pour $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\|(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - (a_1, a_2)\|_2 = r.$$

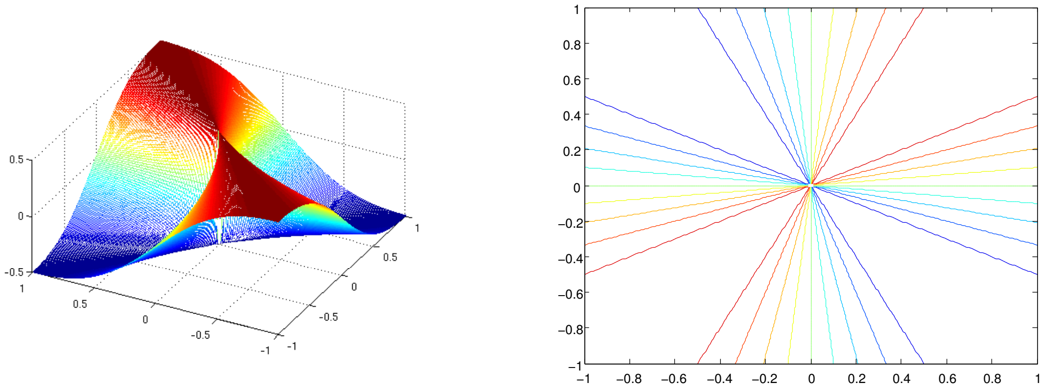

FIGURE 2.1 – Graphe et lignes de niveau pour le contre-exemple 2.7 : autour de (0,0) on trouve toutes les valeurs entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; en particulier f n'est pas continue.

On suppose que f est continue en a. Pour $r \geqslant 0$ on note

$$\varepsilon(r) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \geqslant 0$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ si $\|x - a\|_2 \leqslant \delta$, donc $\varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0$ si $r \leqslant \delta$. Cela prouve que $\varepsilon(r) \to 0$ quand $r \to 0$. Inversement, supposons qu'une telle fonction ε existe. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0$ si $r \leqslant \delta$. Soit alors $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x - a\|_2 \leqslant \delta$. Alors il existe $r \in [0, \delta]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $x = (a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin(\theta))$. On a alors

$$|f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0.$$

Cela prouve que f est continue en a. □

Exemple 2.9. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On étudie maintenant la continuité en (0,0). Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| = \frac{r^4 \left|\cos(\theta)^2\right| \left|\sin(\theta)^2\right|}{r^2} \leqslant r^2 \xrightarrow[r \to 0]{} 0.$$

Cela prouve que f est continue en (0,0).

2.2 Encore un peu de topologie

Définition 2.10. On dit d'une partie de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est compacte si elle est fermée et bornée.

Attention, cette définition est propre à la dimension finie. Il y a d'autres définitions équivalentes de la compacité qui elles sont encore valables en dimension infinie. Mais on ne s'attardera pas sur la notion de compacité dans ce cours (là encore, ce sera fait dans le cours d'approfondissements mathématiques).

La proposition suivante généralise le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un segment est continue et atteint ses bornes :

Proposition 2.11. *L'image d'un compact par une fonction continue est compacte.*

Corollaire 2.12. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

2.3 Fonctions contractantes - théorème du point fixe

Soit f une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.13. Soit $K \geqslant 0$. On dit que f est K-lipschitzienne si

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant K \|x - y\| .$$

On dit que f est lipschitzienne si elle est K-lipschitzienne pour un certain $K \geqslant 0$.

Remarque 2.14. Attention, la constante de Lipschitz K dépend du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Par contre, par équivalence des normes, le fait qu'une fonction soit lipschitzienne ou non ne dépend pas des normes choisies.

Proposition 2.15. *Une fonction lipschitzienne est continue.*

***Exercice* 3.** Démontrer la proposition 2.15.

Définition 2.16. On dit que f est contractante si elle est K-lipschitzienne pour un certain $K \in [0, 1[$.

On montre maintenant un résultat qui nous sera utile au chapitre 6 pour montrer les théorèmes de l'inversion locale et des fonctions implicites. C'est un théorème qui est également très utile par ailleurs. C'est encore sur le théorème du point fixe que repose le théorème de Cauchy-Lipschitz, point de départ de la théorie des équations différentielles.

Théorème 2.17 (Théorème du point fixe)**.** *Soit Ω une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction contractante de Ω dans Ω. Alors f admet un unique point fixe a (solution de l'équation $f(a) = a$) dans Ω. En outre si on se donne $x_0 \in \Omega$ et si on définit par récurrence $x_{m+1} = f(x_m)$, alors x_m tend vers cet unique point fixe quand m tend vers l'infini. Plus précisément on a*

$$\|x_m - a\| \leqslant \frac{K^m}{1 - K} \|x_1 - x_0\| .$$

***Exercice* 4.** Dans chacun des cas suivants, montrer que la conclusion du théorème du point fixe n'est pas vérifiée, puis expliciter l'hypothèse qui n'est pas satisfaite :

(i) $\Omega =]0, 1[$ et $f : x \mapsto x/2$,
(ii) $\Omega = [0, 1]$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
(iii) $\Omega = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
(iv) $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f : x \mapsto \sin(x)$.

Démonstration. On suppose que x et y sont deux points fixes de f. Alors on a

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant K \|x - y\| ,$$

ce qui implique que $\|x - y\| = 0$ et donc que $x = y$. Cela prouve l'unicité d'un éventuel point fixe pour f. Soit maintenant $x_0 \in \Omega$. Comme Ω est stable par f, on peut poser par récurrence $x_m = f(x_{m-1})$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a alors

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \|f(x_m) - f(x_{m-1})\| \leqslant K \|x_m - x_{m-1}\| ,$$

et donc on obtient par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leqslant K^m \|x_1 - x_0\| .$$

Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\|x_{m+l} - x_m\| \leqslant \sum_{i=0}^{l-1} \|x_{m+i+1} - x_{m+i}\| \leqslant \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{l-1} K^{i+m} \leqslant K^m \frac{\|x_1 - x_0\|}{1 - K} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

Cela prouve que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque $\mathbb{R}^n$ est complet, elle converge vers une limite x. Comme Ω est fermé, cette limite appartient à Ω. Enfin pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a

$$x_{m+1} = f(x_m).$$

L'hypothèse sur f implique que f est continue sur Ω, donc par passage à la limite ($m \to \infty$) on obtient

$$x = f(x).$$

D'où l'existence d'un point fixe et la propriété d'approximation par des suites. □

En fait on aura besoin d'une version à paramètre de ce théorème du point fixe. On peut éventuellement omettre cette version rafinée en première lecture :

Théorème 2.18 (Théorème du point fixe à paramètre)**.** *Soit Ω une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et Λ une partie de $\mathbb{R}^m$. Soit f une fonction continue de $\Omega \times \Lambda$ dans Ω. On suppose que f est uniformément contractante : il existe $K \in [0,1[$ tel que pour tous $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in \Lambda$ on a*

$$\|f(x,\lambda) - f(y,\lambda)\| \leqslant K \|x - y\|.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $x \mapsto f(x,\lambda)$ admet un unique point fixe a_λ (solution de l'équation $f(a_\lambda,\lambda) = a_\lambda$) dans Ω. En outre l'application $\lambda \mapsto a_\lambda$ est continue de Λ dans Ω.

Démonstration. L'existence et l'unicité du point fixe a_λ résultent pour chaque $\lambda \in \Lambda$ du théorème 2.17. Il suffit de montrer la continuité. Soient $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$. On a

$$\begin{aligned}
\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| &= \|f(a_\lambda,\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\| \\
&\leqslant \|f(a_\lambda,\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda)\| + \|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\| \\
&\leqslant K\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| + \|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\|.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| \leqslant \frac{1}{1-K}\|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\|,$$

et donc la continuité de $\lambda \mapsto \alpha_\lambda$ en λ_0 est conséquence de la continuité de f au point $(a_{\lambda_0},\lambda_0)$. □

2.4 Dérivabilité pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$.

On considère dans ce paragraphe une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & f(t) = f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{array} \right.$$

où $f_1, \dots, f_p$ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

***Exercice* 5.** Montrer que f est continue sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ le sont.

On anticipe maintenant sur le prochain chapitre en commençant à parler de dérivabilité. La dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle est définie de la même façon quand elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ que quand elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$:

Définition 2.19. • Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si le quotient

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \tag{2.1}$$

admet une limite dans $\mathbb{R}^p$ quand t tend vers t_0. Dans ce cas on note $f'(t_0)$ cette limite.

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas on appelle fonction dérivée l'application $f' : t_0 \mapsto f'(t_0)$.

***Exercice* 6.** Montrer que f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ le sont, et que dans ce cas on a pour tout $t \in I$:

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_p'(t))$$

A la lumière des exercices 5 et 6 on voit que l'étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ ne pose pas vraiment de difficulté nouvelle. Il suffit de travailler coordonnées par coordonnées. Ainsi on retrouve sans problèmes les propriétés de base de la dérivée (linéarité, dérivation du produit entre une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, dérivée de la composée $f \circ g$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, etc.)

Il faut tout de même faire attention à quelques subtilités. Par exemple le théorème de Rolle et ses conséquences ne sont plus valables pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 2.20. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f(0) = f(2\pi)$, et pourtant la dérivée f' ne s'annule jamais.

La semaine prochaine...

Dans ce chapitre on a vu comment généraliser la notion de continuité pour des fonctions de plusieurs variables. On a également vu que la notion de dérivabilité ne pose pas de réel problème pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$. Par contre on se doute que les soucis vont arriver lorsqu'on voudra dériver des fonctions de plusieurs variables, puisque si t et t_0 sont des points de $\mathbb{R}^n$ le quotient (2.1) n'a pas de sens.

On cherchera dans le chapitre suivant à généraliser la notions de dérivabilité. Pour cela

- bien revoir la notion de dérivabilité pour une fonction d'une variable, et surtout bien se rappeler pourquoi c'est une notion intéressante, voir parmis les applications lesquelles pourraient être généralisées à des fonctions de plusieures variables,
- voir pourquoi la définition utilisée en dimension 1 ne peut pas être transposée brutalement en dimension supérieure,
- essayer de proposer une définition de dérivée en dimension supérieure qui permet de retrouver autant que possible les bonnes propriétés de la dimension 1,
- ...

2.5 Exercices

***Exercice* 7.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en (0,0) pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ possible) par

$$f_1(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \frac{xy}{x+y},$$

$$f_4(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_5(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad f_6(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$f_7(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y), \qquad f_8(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad f_9(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

***Exercice* 8.** Les limites suivantes existent-elles :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \quad ?$$

***Exercice* 9.** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis déterminer si elles sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1 : (x,y) \mapsto \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \quad f_2 : (x,y) \mapsto \frac{y\sin(x+1)}{x^2-2x+1}, \quad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

***Exercice* 10.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le théorème des valeurs intermédiaires est vérifié : si les réels a et b sont dans l'image de f alors tous les réels entre a et b le sont également. Autrement dit, l'image de f est un intervalle de f. Question subsidiaire (dont la réponse sera donnée dans le cours d'approfondissement mathématiques) : dans quelle mesure ce résultat se généralise au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et son domaine n'est pas nécessairement $\mathbb{R}^n$ tout entier ?