Chapitre 11

Théorème de Poincaré - Formule de Green-Riemann

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité du précédent. On a vu à la proposition 10.16 que les formes différentielles sont bien plus agréables à manipuler lorsqu'elles sont exactes. Le théorème de Poincaré va nous donner un critère relativement simple pour s'assurer qu'une forme est exacte.

Toujours à la proposition 10.16, on a commencé à généraliser le théorème fondamental de l'analyse en exprimant l'intégrale le long d'une courbe γ d'une forme différentielle ω en fonction des valeurs d'une primitive de ω sur le bord de γ. La formule de Green-Riemann est une généralisation en dimension 2 de ce résultat. Plus précisément, on va exprimer l'intégrale d'une fonction sur un ouvert simple Ω de $\mathbb{R}^2$ en fonction de l'intégrale d'une certaine forme différentielle ω (qui sera une primitive, en un sens à préciser) sur le bord de Ω (qui est une courbe).

11.1 Dérivée extérieure d'une 1-forme

On commence par introduire la dérivée d'une 1-forme sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (on verra au chapitre suivant comment cela se généralise en dimension supérieure). Plus généralement, on définit dans ce paragraphe les 2-formes différentielles.

Définition 11.1. • On note $dx \wedge dy$ l'application

$$dx \wedge dy : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & u_1v_2 - u_2v_1 = \det(u,v) \end{array} \right.$$

où on a noté $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2)$.

• Plus généralement, si φ_1 et φ_2 sont deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$, on note $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ l'application qui au couple $(u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2$ associe le réel $\varphi_1(u)\varphi_2(v) - \varphi_2(u)\varphi_1(v)$.

Remarque 11.2. En particulier on a $dx \wedge dx = 0$, $dy \wedge dy = 0$ et $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$.

Définition 11.3. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On appelle 2-forme différentielle de classe C^k une application de la forme

$$\omega : (x,y) \mapsto f(x,y)\, dx \wedge dy,$$

où f est une application de classe C^k de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$. ω est en particulier une application de classe C^k de $\mathcal{U}$ dans l'espace des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^2$.

Définition 11.4. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\omega = f(x,y)\, dx \wedge dy$ une 2-forme continue sur $\mathcal{U}$. Lorsque cela a un sens on note

$$\iint_{\mathcal{U}} \omega = \iint_{\mathcal{U}} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Définition 11.5. Soit $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ une 1-forme sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$. On appelle dérivée extérieure de ω sur $\mathcal{U}$ la 2-forme

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx \wedge dy.$$

Remarque 11.6. On a en fait

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy.$$

Exemple 11.7. Si $\omega = \cos(x+y)\,dx + x^2 y\,dy$ alors $d\omega = \big(2xy + \sin(x+y)\big)\,dx \wedge dy$.

Définition 11.8. On dit que la 1-forme différentielle ω est fermée sur $\mathcal{U}$ si $d\omega = 0$ sur $\mathcal{U}$. Si on note $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ alors ω est fermée sur $\mathcal{U}$ si et seulement si pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on a

$$\forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

11.2 Théorème de Poincaré

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On fait maintenant le lien entre les 1-formes exactes (utiles en pratique) et les 1-formes fermées (propriété facile à vérifier par un simple calcul de dérivée).

Proposition 11.9. *Une 1-forme exacte de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ est fermée sur $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Soit $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ une 1-forme exacte sur $\mathcal{U}$. Il existe une fonction f différentiable telle que pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Comme P et Q sont de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, f est en fait une fonction de classe C^2. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on a alors par le théorème de Schwartz

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Cela prouve que $d\omega = 0$. □

Bien sûr, il serait plus intéressant de montrer la contraposée, à savoir qu'une forme fermée est exacte. Ce n'est malheureusement pas vrai en général, mais le théorème de Poincaré nous assure que c'est vrai dès que l'ouvert $\mathcal{U}$ est étoilé :

Définition 11.10. On dit de l'ouvert $\mathcal{U}$ qu'il est étoilé s'il existe $a \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $w \in \mathcal{U}$ on a $[a,w] \subset \mathcal{U}$. On rappelle que $[a,w]$ est par définition l'ensemble

$$\{ta + (1-t)w, t \in [0,1]\}.$$

Exemples 11.11. • $\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$.
• Une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ est étoilée.
• L'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ n'est pas étoilé.

Théorème 11.12 (Théorème de Poincaré)**.** *On suppose que $\mathcal{U}$ est un ouvert étoilé. Alors toute 1-forme différentielle fermée de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ est exacte.*

Démonstration. On suppose que l'ouvert $\mathcal{U}$ est étoilé par rapport au point (a,b) et on considère une forme ω fermée sur $\mathcal{U}$. Pour $(x,y) \in \mathcal{U}$ on considère la courbe paramétrée

$$\gamma_{x,y} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathcal{U} \\ t & \mapsto & (a + t(x-a), b + t(y-b)) \end{array} \right.$$

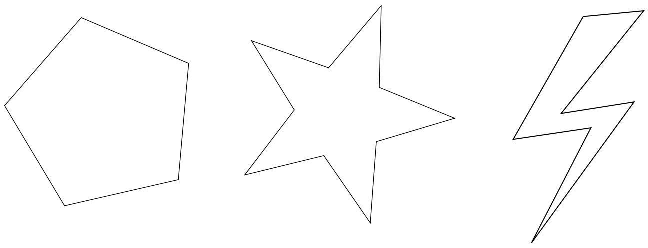

Figure 11.1 – Domaines convexe et donc étoilé, étoilé mais pas convexe et non étoilé.

puis on pose
$$f(x,y) = \int_{\gamma_{x,y}} \omega.$$
Notant $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ cela donne
$$f(x,y) = \int_0^1 \big(P(\gamma_{x,y}(t))(x-a) + Q(\gamma_{x,y}(t))(y-b)\big)\,dt.$$
Soit $(x_0,y_0) \in \mathcal{U}$. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 dans $\mathbb{R}$ tel que (x,y_0) appartient à $\mathcal{V}$ pour tout $x \in \mathcal{V}$, et donc $\gamma_{x,y_0}(t) \in \mathcal{U}$ pour tous $x \in \mathcal{V}$ et $t \in [0,1]$. L'application
$$(t,x) \mapsto \big(P(\gamma_{x,y_0}(t))(x-a) + Q(\gamma_{x,y_0}(t))(y_0-b)\big)$$
est de classe C^1 sur $[0,1] \times \mathcal{V}$ et sa dérivée partielle par rapport à x est donnée par
$$P(\gamma_{x,y_0}(t)) + t\left(\frac{\partial P}{\partial x}\big(\gamma_{x,y_0}(t)\big)(x-a) + \frac{\partial Q}{\partial x}\big(\gamma_{x,y_0}(t)\big)(y_0-b)\right).$$
Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on obtient que f est dérivable par rapport à x et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \int_0^1 P(\gamma_{x_0,y_0}(t))\,dt + \int_0^1 t\left(\frac{\partial P}{\partial x}\big(\gamma_{x_0,y_0}(t)\big)(x_0-a) + \frac{\partial Q}{\partial x}\big(\gamma_{x_0,y_0}(t)\big)(y_0-b)\right)\,dt.$$
Soit $(x,y) \in \mathcal{U}$. Pour $t \in [0,1]$ on note $g(t) = P(\gamma_{x,y}(t))$. g est de classe C^1 et pour $t \in [0,1]$ on a
$$g'(t) = \frac{\partial P}{\partial x}\big(\gamma_{x,y}(t)\big)(x-a) + \frac{\partial P}{\partial y}\big(\gamma_{x,y}(t)\big)(y-b).$$
Comme ω est fermée, on a également
$$g'(t) = \frac{\partial P}{\partial x}\big(\gamma_{x,y}(t)\big)(x-a) + \frac{\partial Q}{\partial x}\big(\gamma_{x,y}(t)\big)(y-b).$$
Ainsi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \big(g(t) + tg'(t)\big)\,dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(tg(t)\big)\,dt = g(1) = P(x,y).$$
De la même façon on montre que f est dérivable par rapport à y sur $\mathcal{U}$ et pour tout $(x,y) \in \mathcal{U}$ on a
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$
Cela prouve que
$$df = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \omega.$$
En particulier ω est une forme exacte. □

Remarque 11.13. On note qu'on obtient en outre une expression explicite pour une primitive.

Exemple 11.14. Attention, la forme différentielle

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx.$$

est fermée mais n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

11.3 Formule de Green-Riemann

On dira qu'un ouvert bornée Ω de $\mathbb{R}^2$ a un bord C^1 par morceaux si sa frontière $\partial\Omega$ est union finie de supports de courbes γ_i pour $i \in [\![1,N]\!]$ (avec $N \in \mathbb{N}$) fermées, simples, et C^1 par morceaux.
On dira que $\partial\Omega$ est orienté de sorte que Ω soit à sa gauche si pour tout $i \in [\![1,N]\!]$ et lorsque t croit, le point $\gamma_i(t)$ « se déplace en laissant Ω à sa gauche ». Cela signifie qu'en tout point $\gamma_i(t)$, la base $(\nu, \gamma_i'(t))$ est directe, où ν est un vecteur normal sortant au point $\gamma_i(t)$.

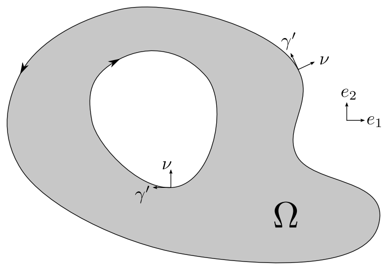

FIGURE 11.2 – Orientation du bord d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Si $\mathcal{U}$ est un ouvert contenant l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω et ω est une 1-forme continue sur $\mathcal{U}$, on note alors

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \omega.$$

On considère maintenant un ouvert élémentaire Ω de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\right\},\end{aligned}$$

avec $a < b$, $c < d$, φ_1 et φ_2 sont C^1 par morceaux sur $[a,b]$, ψ_1 et ψ_2 sont C^1 par morceaux sur $[c,d]$, et on a $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$ et $\psi_1 \leqslant \psi_2$.

Lemme 11.15. *Soit $P(x,y)\,dx$ et $Q(x,y)\,dy$ deux 1-formes continues sur un ouvert $\mathcal{U}$ contenant $\overline{\Omega}$. Alors on a*

$$\int_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx = \int_a^b \big(P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t))\big)\,dt$$

et

$$\int_{\partial\Omega} Q(x,y)\,dy = \int_c^d \big(-Q(t,\psi_1(t)) + Q(t,\psi_2(t))\big)\,dt.$$

Démonstration. On montre la première égalité. La deuxième se montre de façon analogue. On paramètre le bord de Ω à l'aide des quatres courbes suivantes :
- γ_1 définie sur $[a,b]$ par $\gamma_1(t) = (t, \varphi_1(t))$,
- γ_2 définie sur $[\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$ par $\gamma_2(t) = (b,t)$,
- γ_3 définie sur $[a,b]$ par $\gamma_3(t) = (t, \varphi_2(t))$,
- γ_4 définie sur $[\varphi_1(a), \varphi_2(a)]$ par $\gamma_4(t) = (a,t)$.

Pour toute 1-forme continue sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$ on a

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega - \int_{\gamma_3} \omega - \int_{\gamma_4} \omega.$$

En particulier

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx &= \int_a^b P(t,\varphi_1(t)) \times 1\,dt + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b,t) \times 0\,dt \\
&\quad - \int_a^b P(t,\varphi_2(t)) \times 1\,dt + \int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)} P(a,t) \times 0\,dt \\
&= \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\,dt - \int_a^b P(t,\varphi_2(t))\,dt.
\end{aligned}$$

□

On montre maintenant la formule de Green-Riemann :

Théorème 11.16. *[Formule de Green-Riemann] Soit Ω un ouvert élémentaire de $\mathbb{R}^2$ et ω une 1-forme de classe C^1 sur un ouvert contenant $\overline{\Omega}$. Alors on a*

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega.$$

On rappelle que si on note $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ on a

$$\int_\Omega d\omega = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy.$$

Démonstration. D'après le théorème de Fubini et le lemme précédent on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega d\omega &= \int_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy - \int_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \right) dx \\
&= \int_c^d \big(Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\big)\,dy - \int_a^b \big(P(x,\varphi_2(x) - P(x,\varphi_1(x))\big)\,dx \\
&= \int_{\partial\Omega} Q(x,y)\,dy + \int_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx \\
&= \int_{\partial\Omega} \omega.
\end{aligned}$$

□

Remarque 11.17. • Ce résultat peut être étendus à des ouverts plus généraux, par exemple des ouverts simples. Les intégrales sur les frontières communes aux différentes parties élémentaires se compensent.

- La formule de Green-Riemann est utile dans les deux sens. Selon le problème considéré, on peut vouloir ramener un calcul d'intégrale double au calcul d'une intégrale curviligne ou l'inverse.

Exemple 11.18. La formule de Green-Riemann peut par exemple servir à calculer l'aire d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ *via* l'une des égalités suivantes :

$$\text{Aire}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x\,dy = -\int_{\partial\Omega} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx.$$

11.4 Exercices

***Exercice* 1.** On considère sur le demi-plan $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Montrer que ω est exacte et déterminer ses primitives.

***Exercice* 2.** On considère sur le demi-plan $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy.$$

1. Montrer que ω est exacte et déterminer ses primitives.
2. Soit Γ une courbe C^1 par morceaux allant de $A = (1,2)$ à $B = (3,8)$. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$.

***Exercice* 3.** On considère la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y)dy$.
1. Montrer que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer l'intégrale de ω sur le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, allant de $A = (1,2)$ vers $B = (3,4)$.
3. On considère maintenant la courbe paramétrée $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (1 + 3t - t^2, 2 + 4t - 2t^2)$. Calculer l'intégrale de ω le long de γ.

***Exercice* 4.** **1.** Déterminer l'ensemble des fonctions φ de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\varphi = 0$ et la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega = \frac{2xy}{(1+x^2)^2}dx + \varphi(x)dy\,,$$

est exacte.
2. Déterminer alors une primitive de ω.
3. On considère la courbe Γ d'équation $3x^2 = -7y^2 + 21$ orientée dans le sens direct. Quelle est la nature de cette courbe ? Calculer l'intégrale de ω sur Γ.

***Exercice* 5.** On considère l'anneau $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Retrouver l'aire de A en utilisant la formule de Green–Riemann.

***Exercice* 6.** On note ∂D le contour du domaine D défini par

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = xy^2dx + 2xydy$ le long de ∂D parcouru dans le sens direct
1. en utilisant un paramétrage de ∂D,
2. en utilisant la formule de Green–Riemann.

***Exercice* 7.** Utiliser le théorème de Green–Riemann pour calculer les intégrales curvilignes suivantes (les courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique)
1. $\int_{C_R} -x^2y\,dx + xy\,dy$ où C_R est le cercle centré en $(0,0)$ et de rayon $R > 0$,
2. $\int_{C_R} (x^2 - y)\,dx + (y^2 + x)\,dy$ où C_R est comme précédemment,
3. $\int_{\partial T} 2(x^2 + y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy$ où ∂T est le contour du triangle de sommets $A = (1,1)$, $B = (2,2)$ et $C = (1,3)$, parcouru dans le sens direct.

***Exercice* 8.** Utiliser le théorème de Green–Riemann pour calculer l'aire du domaine délimité par la courbe paramétrée par $\theta \mapsto (\cos^3\theta, \sin^3\theta)$ pour θ allant de 0 à 2π.

Exercice 9. Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.

1. Montrer que cette intégrale est convergente.

2. On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}\Big(\big(x\sin(x) - y\cos(x)\big)\, dx + \big(x\cos(x) + y\sin(x)\big)\, dy\Big).$$

Montrer que ω est fermée.

3. Soit $R > 1$. On considère le domaine

$$D_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > 0,\ \frac{1}{R^2} < x^2 + y^2 < R^2\right\},$$

et on note Γ_R son contour, orienté de sorte à laisser D_R sur sa gauche. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{\Gamma_R} \omega$.

4. Pour $r > 0$ on note γ_r le demi-cercle $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y > 0,\ x^2+y^2 = r^2\big\}$, orienté dans le sens trigonométrique, puis $I_r = \int_{\gamma_r} \omega$.

a. Étudier la limite de I_r lorsque r tend vers 0.

b. Montrer que I_r tend vers 0 lorsque r tend vers $+\infty$.

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.