Université Toulouse 3 — L2 Mathématiques
Année 2011-2012 — Calcul Intégral

Examen Terminal

Mardi 15 Mai
Durée 2 heures

Aucun document, ni calculatrice, n'est autorisé. Un réel effort de rédaction sera apprécié. On rappelle que toute réponse doit être justifiée proprement.

Exercice 1 : Pour $x > 0$ on note

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3 + xt + t^2}\, dt.$$

1) Montrez que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrez que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 : On considère la 1-forme différentielle de $\mathbb{R}^2$ suivante

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2 - 4x + 4} dx + \frac{x - 2}{x^2 + y^2 - 4x + 4} dy\,.$$

1) Donnez l'ensemble de définition U de ω.
2) Est-ce que ω est fermée ?
3) On note Γ le cercle centré en $A = (2, 0)$ et de rayon 3, parcouru dans le sens trigonométrique. Calculez l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \omega$.
4) Est-ce que la 1-forme différentielle ω est exacte sur U ?
5) On note V l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 < 1\}\,.$$

Montrez que ω est exacte sur V.

Exercice 3 : Volume du paraboloïde.
1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Montrez que pour un rayon $r \geq 0$ fixé, la fonction f est constante sur le cercle centré en 0 et de rayon r.
2) Dessinez le paraboloïde

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z = 1\}\,.$$

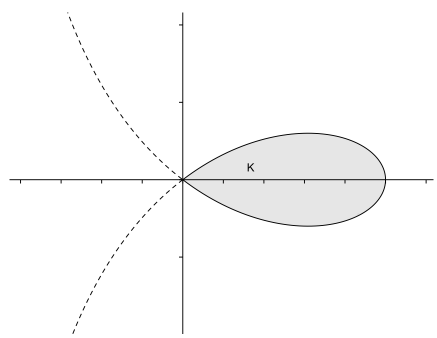
3) Calculez le volume du domaine

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2 + y^2 + z \leq 1, z \geq 0\}\,.$$

Exercice 4 :
1) Rappelez l'énoncé de la formule de Green-Riemann.
2) Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la formule de Green-Riemann peut s'appliquer. On note (r, θ) les coordonnées polaires de $\mathbb{R}^2$. Si on note $\mathcal{A}$ l'aire de K, montrez qu'on a

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\partial K^+} r^2 d\theta\,.$$

3) La strophoïde droite est la courbe paramétrée en coordonnées polaires par la relation $r = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ (où a est un nombre réel) pour $\theta \in]-\pi/2\,;\,\pi/2[$, dont le graphe est ci-dessous :



On note K le domaine compact délimité par la boucle de la strophoïde droite (cf. dessin ci-dessus), c'est-à-dire que le bord de K est paramétré par $r = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ mais avec θ variant uniquement de $-\pi/4$ à $\pi/4$.

Calculez l'aire du compact K.